

有向拓扑结构下复杂网络系统的同步验证

王磊,张书源,葛思彤,刘洋

(北京航空航天大学 自动化科学与电气工程学院,北京 100191)

摘要:研究了具有非线性耦合的复杂网络系统的同步验证问题.基于一般的非二次型 Lyapunov 函数,建立了保守性更弱的有向拓扑结构下的非线性网络系统的同步判据.对于多项式网络系统,将可同步问题转化为平方和优化问题,由此来高效地求解高阶的多项式 Lyapunov 函数.求解平方和优化问题隶属于凸优化框架,因此可以在多项式时间内自动地实现系统的同步验证.最后,通过一个数值仿真实例验证了理论结果的有效性,同时说明了所提出的方法可以使用一个较小的耦合强度下界来确保同步实现.

关键词:多项式 Lyapunov 函数;同步验证;复杂网络系统;平方和优化

中图分类号:O231.2

文献标志码:A

文章编号:1000-2367(2024)02-0027-06

在过去的几十年里,复杂网络系统作为一门跨学科研究在物理^[1]、控制科学^[2]、社会科学^[3]、经济学^[4]等领域引起了广泛的关注.同步是自然界中常见的集体行为现象,在某种程度上揭示了动物群体聚集行为的本质,如蜂拥现象^[5-6].因此,开展复杂网络系统的同步研究工作具有重大的科学意义^[7-12].

目前,现有研究工作中大都是在“手动”构造二次型 Lyapunov 函数的基础上^[13-17],致力于研究具有线性耦合的复杂网络系统的同步问题.然而,在稳定性理论中,有相当多的稳定性系统不存在二次型 Lyapunov 函数,而存在更一般的 Lyapunov 函数.基于这个事实,寻找一般的 Lyapunov 函数来证明非线性系统的同步是合理的.例如,基于一般的 Lyapunov 函数构造,学者们通过提出的 Lyapunov V-稳定性方法研究了复杂动态网络的全局同步问题^[18-19].因此,通过“自动”生成一般的非二次型 Lyapunov 函数来实现具有非线性耦合的复杂网络系统的同步验证是十分必要的.

幸运的是,平方和(sum-of-squares, SOS)分解框架提供了一种弱保守的方式计算稳定性系统的多项式 Lyapunov 函数^[20-25].PAPACHRISTODOULOU 等^[20]提出了一种 Lyapunov 函数算法构造的思想,用以研究非线性系统的稳定性问题.随后,进一步形成了基于 SOS 分解的系统分析教程^[21].ZHANG 等^[22]提出了一种迭代的 SOS 优化算法求解多项式矩阵不等式,实现了多项式网络系统的稳定性验证.近来,学者们^[23-25]利用 SOS 优化方法设计程序化算法搜索多项式 Lyapunov 函数,验证了无向及有向拓扑下复杂网络系统的同步判据.

在本文中,通过 SOS 优化框架下的多项式 Lyapunov 函数算法计算,将致力于研究具有非线性耦合的复杂网络系统的同步验证问题.首先,通过松弛经典的类 Lipschitz 条件,系统地构造一般的 Lyapunov 函数并建立保守性更弱的有向拓扑结构下非线性网络系统的同步判据.然后,通过多元多项式的 SOS 分解技术,将非负性约束用 SOS 条件替代,通过求解 SOS 优化问题自动地寻找多项式 Lyapunov 函数,从而实现系统的同步验证.最后,给出一个仿真实例来说明所提出方法的有效性.

收稿日期:2022-12-05;**修回日期:**2023-01-05.

基金项目:国家自然科学基金(61873017).

作者简介(通信作者):王磊(1981—),男,山东威海人,北京航空航天大学教授,博士,国家级青年人才,研究方向为复杂系统的建模、控制、优化与验证, E-mail:lwang@buaa.edu.cn.

引用本文:王磊,张书源,葛思彤,等.有向拓扑结构下复杂网络系统的同步验证[J].河南师范大学学报(自然科学版),2024,52(2):27-32.(Wang Lei,Zhang Shuyuan,Ge Sitong,et al.Synchronization verification for complex networked systems with directed graph[J].Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition),2024,52(2):27-32.DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2022.12.05.0001.)

符号定义: \mathbf{R}_+ 和 \mathbf{R} 分别表示正实数和实数的集合. \mathbf{R}^n 是 n 维实向量的集合, $\mathbf{R}^{m \times m}$ 是 $m \times m$ 维实矩阵的集合, $\mathbf{R}[\cdot]$ 是实系数的多项式集合. $\text{diag}\{\kappa_1, \dots, \kappa_n\}$ 是一个对角矩阵, 其对角元素为 $\kappa_1, \dots, \kappa_n$. $\|\Delta\|$ 表示向量 Δ 的向量范数. $\Phi \otimes \Psi$ 表示矩阵 Φ 和 Ψ 的 Kronecker 积; Φ^T 表示矩阵(向量) Φ 的转置, $\Psi > 0$ 表示矩阵 Ψ 是正定的. 对于一个连续可微的函数 $V(\psi): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, 令

$$\nabla V(\psi) = \left[\frac{\partial V(\psi)}{\partial \psi} \right]^T, \nabla V(\varphi - \phi) = \left[\frac{\partial V(\psi)}{\partial \psi} \right]^T \Big|_{\psi=\varphi-\phi},$$

其中 $\psi, \varphi, \phi \in \mathbf{R}^n$. $\text{SOS}[x]$ 表示多元 SOS 多项式的集合, 即

$$\text{SOS}[x] = \left\{ \rho(x) \in \mathbf{R}[x] \left| \begin{array}{l} \rho(x) = \sum_{i=1}^k p_i^2(x), \forall x \in \mathbf{R}^n, \\ p_i(x) \in \mathbf{R}[x], i=1, 2, \dots, k. \end{array} \right. \right\}.$$

1 问题描述

图论是描述网络拓扑结构的重要工具, 简要介绍如下. 令 $\mathcal{G} = (v, \epsilon, A)$ 表示一个具有 N 个节点的加权有向图, 其中 $v = \{v_1, \dots, v_N\}$ 表示节点集合, $\epsilon \in v \times v$ 表示边集合. 邻接矩阵 $A = (A_{jk}) \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 表示从节点 k 向节点 j 的信息传递, 其中每条边 $\{v_j, v_k\}$ 的权重用 $A_{jk} \geq 0$ 来表示. 拉普拉斯矩阵 $L = (L_{jk}) \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 的定义为: 对于 $j \neq k, L_{jk} = -A_{jk}$ 且 $L_{jj} = \sum_{k=1, k \neq j}^N A_{jk}$. 如果存在一条有向路径连接任意两个不同的节点 v_i 和 v_j , 其中 $i, j = 1, 2, \dots, N$, 则称有向图 \mathcal{G} 是强连通的. 在本文中, 假设有向图 \mathcal{G} 是强连通的, 即 L 是一个不可约的拉普拉斯矩阵.

考虑一个由 N 个节点非线性耦合的动态网络, 其中每个节点都是一个 n 维的动态系统, 其数学模型表达如下:

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) - \sigma \sum_{i=1}^N L_{ij} h(x_j(t)), i=1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

其中, $f(x_i) = [f_1(x_i), \dots, f_n(x_i)]^T \in \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 和 $h(x_j) = [h_1(x_j), \dots, h_n(x_j)]^T \in \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是非线性函数向量, $x_i = [x_{i1}, \dots, x_{in}]^T \in \mathbf{R}^n$ 是节点 i 的状态向量, σ 表示耦合强度, $L = (L_{ij}) \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 表示有向图 \mathcal{G} 的拉普拉斯矩阵, 它具有如下的性质: 非对角线元素 $L_{ij} \leq 0 (i \neq j)$, 以及对角线元素 $L_{ii} = -\sum_{j=1, i \neq j}^N L_{ij}$.

定义 1^[24] 若对于 $\forall \epsilon > 0, \exists T \in \mathbf{R}_+$, 使得对于任意初始条件和所有 $t > T$, 都有 $\|x_i(t) - x_j(t)\| \leq \epsilon (i, j = 1, 2, \dots, N)$, 则称网络(1)实现同步.

引理 1^[26] 有向图 \mathcal{G} 的拉普拉斯矩阵 L 具有一个代数重数为 1 的零特征值, 而其他特征值均具有正实部. 对应于矩阵 L 的零特征值的左特征向量 $\zeta = |\zeta_1, \dots, \zeta_N|^T$ 满足 $\zeta^T L = 0$, 其中 $\sum_{i=1}^N \zeta_i = 1$ 且 $\zeta_i > 0 (i = 1, 2, \dots, N)$.

引理 2^[27] 有向图 \mathcal{G} 一般代数连通性记为:

$$\alpha_{\zeta}(L) = \min_{x^T \zeta = 0, x \neq 0} \frac{x^T \tilde{L} x}{x^T \Xi x}, \quad (2)$$

其中, $\tilde{L} = (\Xi L + L^T \Xi) / 2, \Xi = \text{diag}\{\zeta_1, \dots, \zeta_N\}$.

引理 3^[28] 如果 $\Lambda = (\Lambda_{ij}) \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 是一个对称矩阵, 且满足 $\Lambda_{ij} \leq 0 (i \neq j)$ 和 $\Lambda_{ii} = -\sum_{j=1(i \neq j)}^N \Lambda_{ij}$, 则

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i^T \Lambda_{ij} \beta_j = -\sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N (\alpha_i - \alpha_j)^T \Lambda_{ij} (\beta_i - \beta_j), \quad (3)$$

其中, $\alpha_i \in \mathbf{R}^n$ 和 $\beta_j \in \mathbf{R}^n (i, j = 1, 2, \dots, N)$.

2 主要结果

在本节中, 将讨论有向拓扑结构下复杂网络(1)的同步问题. 通过构造一般的 Lyapunov 函数, 提出了一个保证同步的充分条件, 并通过 SOS 优化方法自动地寻找多项式 Lyapunov 函数, 以实现系统的同步验证.

首先,给出了关于 $f(\cdot)$ 和 $h(\cdot)$ 的假设.

假设 1 对于 $f(\cdot): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 和 $h(\cdot): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, 存在一个连续可微、径向无界、正定函数 $V(\cdot): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_+$, 一个向量值函数 $q(\cdot): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ 及一个标量 $\vartheta \in \mathbf{R}$, 使得对于 $\forall i, j = 1, 2, \dots, N$, 有

$$G_{\nabla V}(x_i - \bar{x}, x_j - \bar{x})G_f(x_i, x_j) \leq \vartheta G_{q, \mathbf{W}}(x_i - \bar{x}, x_j - \bar{x}), \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \nabla V(x_i - \bar{x})L_{ij}G_h(x_j, \bar{x}) \geq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N q^T(x_i - \bar{x})\mathbf{W}L_{ij}q(x_j - \bar{x}), \quad (5)$$

其中, $G_{\nabla V}(a, b) = \nabla V(a) - \nabla V(b)$, $G_{q, \mathbf{W}}(a, b) = [q(a) - q(b)]^T \mathbf{W} [q(a) - q(b)]$, ($\forall a, b \in \mathbf{R}^n$), $\mathbf{W} \in \mathbf{R}^{m \times m}$ 是一个半正定矩阵.

注 1 需要注意的是, 如果 $V(x) = x^T \mathbf{P}x/2$, $q(x) = x$, $\mathbf{W} = \mathbf{P}\mathbf{\Gamma}$, 且 $h(x) = \mathbf{\Gamma}x$, 那么存在一个 Lipschitz 常数 $\vartheta \in \mathbf{R}$, 使得下式成立:

$$(x - y)^T \mathbf{P}(f(x) - f(y)) \leq \vartheta(x - y)^T \mathbf{P}\mathbf{\Gamma}(x - y), \quad (6)$$

$\forall x, y \in \mathbf{R}^n$, 即条件(4)退化为经典的类 Lipschitz 条件(6), 其中 \mathbf{P} 是一个正定矩阵, $\mathbf{\Gamma}$ 是一个半正定矩阵. 基于二次型 Lyapunov 函数的同步研究工作(如文献[15-16, 27-28])通常采用上述的类 Lipschitz 条件(6). 同时, 容易验证条件(5)在这种情况下始终成立, 因此可以说对于 $h(\cdot)$ 所做的假设是合理的.

定理 1 如果假设 1 成立, 当 $\vartheta - \sigma a_\zeta(\mathbf{L}) < 0$ 时, 网络实现同步.

证明 令 $\bar{x} = \sum_{r=1}^N \zeta_r x_r$ 和 $\tilde{V} = \sum_{i=1}^N \zeta_i V(x_i - \bar{x})$, 则有

$$\dot{\bar{x}} = \sum_{r=1}^N \zeta_r f(x_r) - \sigma \sum_{r=1}^N \zeta_r \sum_{j=1}^N L_{rj} h(x_j). \quad (7)$$

由引理 1 知道 $\zeta = [\zeta_1, \dots, \zeta_N]^T$ 是矩阵 \mathbf{L} 的零特征值所对应的左特征向量, 因此有

$$\zeta^T \mathbf{L} = \sum_{r=1}^N \zeta_r L_{rj} = 0, \quad (8)$$

即

$$\sum_{r=1}^N \zeta_r \sum_{j=1}^N L_{rj} h(x_j) = 0. \quad (9)$$

然后, 可以得出

$$\dot{x} - \dot{\bar{x}} = f(x_i) - \sum_{r=1}^N \zeta_r f(x_r) - \sigma \sum_{j=1}^N L_{ij} h(x_j). \quad (10)$$

接下来将证明 \tilde{V} 是一个一般的 Lyapunov 函数. 对函数 \tilde{V} 求导, 则有

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{V}} &= \sum_{i=1}^N \zeta_i \nabla V(x_i - \bar{x})(x_i - \dot{\bar{x}}) = \sum_{i=1}^N \zeta_i \nabla V(x_i - \bar{x})(f(x_i) - \sum_{r=1}^N \zeta_r f(x_r)) - \sigma \sum_{i=1}^N \zeta_i \nabla V(x_i - \bar{x}) \\ &\quad \sum_{j=1}^N L_{ij} h(x_j) = \sum_{i=1}^N \sum_{r=1}^N \nabla V(x_i - \bar{x})U_{ir}f(x_r) - \sigma \sum_{i=1}^N \zeta_i \nabla V(x_i - \bar{x}) \sum_{j=1}^N L_{ij}(h(x_i) - h(\bar{x})) = \\ &\quad - \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{r=i+1}^N G_{\nabla V}(x_i - \bar{x}, x_r - \bar{x})U_{ir}G_f(x_i, x_r) - \sigma \sum_{i=1}^N \zeta_i \nabla V(x_i - \bar{x}) \sum_{j=1}^N L_{ij}G_h(x_j, \bar{x}), \end{aligned} \quad (11)$$

其中, $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_{ir}) \in \mathbf{R}^{N \times N} = \mathbf{\Xi} - \zeta \zeta^T$, \mathbf{U} 是一个对称矩阵且满足引理 3. 根据不等式条件(4)和(5)可以推出

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{V}} &\leq -\vartheta \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{r=i+1}^N U_{ir}G_{q, \mathbf{W}}(x_i - \bar{x}, x_r - \bar{x}) - \sigma \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \zeta_i L_{ij}q^T(x_i - \bar{x})\mathbf{W}q(x_j - \bar{x}) = \\ &\quad \vartheta \sum_{i=1}^N \sum_{r=1}^N U_{ir}q^T(x_i - \bar{x})\mathbf{W}q(x_r - \bar{x}) - \sigma \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \tilde{L}_{ij}q^T(x_i - \bar{x})\mathbf{W}q(x_j - \bar{x}) = \\ &\quad \vartheta \mathbf{Q}^T(x - \bar{x})(\mathbf{U} \otimes \mathbf{W})\mathbf{Q}(x - \bar{x}) - \sigma \mathbf{Q}^T(x - \bar{x})(\tilde{\mathbf{L}} \otimes \mathbf{W})\mathbf{Q}(x - \bar{x}) \leq \\ &\quad \mathbf{Q}^T(x - \bar{x})(\vartheta \mathbf{\Xi} - \sigma \tilde{\mathbf{L}}) \otimes \mathbf{W} \mathbf{Q}(x - \bar{x}), \end{aligned} \quad (12)$$

其中, $\mathbf{Q}(x - \bar{x}) = [q^T(x_1 - \bar{x}), \dots, q^T(x_N - \bar{x})]^T$. 基于等式(2), 有 $\dot{\tilde{V}} \leq (\vartheta - \sigma a_\zeta(\mathbf{L}))\mathbf{Q}^T(x - \bar{x})(\mathbf{\Xi} \otimes \mathbf{W})\mathbf{Q}(x - \bar{x})$. 因此, 如果 $\vartheta - \sigma a_\zeta(\mathbf{L}) < 0$ 成立, 则可以得出 $\dot{\tilde{V}} < 0$, 这表明在有向拓扑结构下网络实现了同步.

注 2 通过构造一般的非二次型 Lyapunov 函数, 建立了有向拓扑结构下复杂网络的同步判据. 如上所

述,假设 1 可以视为类 Lipschitz 条件的自然松弛,而一般的 Lyapunov 函数亦可退化为常见的二次型 Lyapunov 函数,由此说明定理 1 的弱保守性.与文献[25]相比,不需要引入严格的等式约束来推导同步判据.此外,如果图 \mathcal{G} 是无向图,则定理 1 可以退化为先前的工作(详见文献[24]).

值得注意的是,预先假设了连续可微函数 $V(\cdot)$ 是存在的,所以需要找到这样一个函数来证明所提出方法的合理性.然而,计算 $V(\cdot)$ 涉及多元非负性条件(4)和(5)的求解,这是十分困难的且缺乏有效的计算方法.在非线性系统的稳定性理论中,SOS 分解技术已被证明是计算 Lyapunov 函数的一个有效手段^[20,22,24],其为计算困难的优化问题提供了有效的凸松弛.由于 SOS 多项式具有完全非负性的性质,对于多项式系统,将非负性条件用 SOS 条件所刻画,由此得到如下的假设 2.这样,便可以利用 SOS 优化方法来高效地计算多项式 Lyapunov 函数.

假设 2 对于 $f(\cdot) \in \mathbf{R}[\cdot]:\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 和 $h(\cdot) \in \mathbf{R}[\cdot]:\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$,存在一个连续可微的 SOS 多项式函数 $V(\cdot) \in \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_+$,一个多项式向量值函数 $q(\cdot):\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$,以及一个标量 $\vartheta \in \mathbf{R}$,使得对于 $\forall i, j = 1, 2, \dots, N$,下式成立:

$$-G_{\nabla V}(x_i - \bar{x}, x_j - \bar{x})G_f(x_i, x_j) + \vartheta G_{q, \mathbf{W}}(x_i - \bar{x}, x_j - \bar{x}) \in \text{SOS}(x), \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \nabla V(x_i - \bar{x})L_{ij}G_h(x_j, \bar{x}) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N q^T(x_i - \bar{x})\mathbf{W}L_{ij}q(x_j - \bar{x}) \in \text{SOS}(x). \quad (14)$$

推论 1 如果假设 2 成立,当 $\vartheta - \sigma a_\zeta(\mathbf{L}) < 0$ 时,网络(1)实现同步.

注 3 对于 SOS 条件(13)和(14), $q(\cdot)$ 和 \mathbf{W} 都是未知的,所以预先假设 $q(\cdot)$ 是一个单项式向量值函数,并且有 $q^T \mathbf{W} q = \hat{q} \hat{\mathbf{W}} \hat{q}$,那么只需求解半正定矩阵 $\hat{\mathbf{W}}$ 即可.此外,条件(13)仍然涉及双线性半定规划问题,这是一个 NP 难问题.为了降低计算复杂度,可以预设 ϑ 的初值来避免该双线性问题的求解,将其转化为易于计算的凸优化问题,由此在多项式时间内完成问题的求解.然而,求解该问题的计算量依赖于状态变量的数量和单项式的阶数.因此,为了保证计算速度,应选择适当阶数的多项式 Lyapunov 函数.然后,便可以使用 YALMIP 工具箱^[29]和 MOSEK 求解器^[30]来进行计算,这是一个可以有效求解上述 SOS 优化问题的优化工具.

3 数值仿真

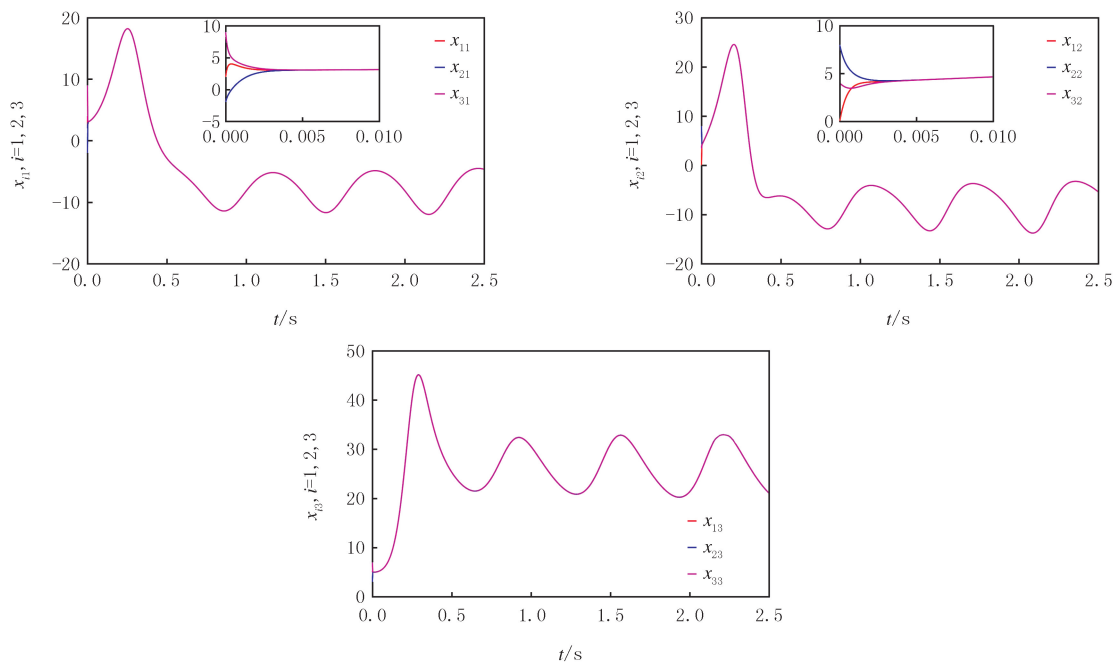
在本节中,提供了一个数值实例来说明所提出方法的有效性.考虑一个包含 3 个混沌振子的洛伦兹系统^[28],每个振子的动力学特性如下:

$$f(x_i) = \begin{bmatrix} 10(x_{i2} - x_{i1}) \\ 28x_{i1} - x_{i2} - x_{i1}x_{i3} \\ x_{i1}x_{i2} - 8x_{i3}/3 \end{bmatrix}, i = 1, 2, 3. \quad (15)$$

选择非线性耦合函数为 $h(x_i) = [10(x_{i1} + 2x_{i1}^3), 10(x_{i2} + 2x_{i2}^3), 10(x_{i3} + 2x_{i3}^3)]^T$. $x_i(t)$ 的初值选为 $x_1(0) = [2, 0, 5]^T$, $x_2(0) = [-2, 8, 3]^T$, $x_3(0) = [9, 4, 7]^T$,拉普拉斯矩阵 $\mathbf{L} = [4, -2, -2; -1, 2, -1; -3, 0, 3]$.

由等式(2)可知 $a_\zeta(\mathbf{L}) = 2.7679$.取 $\deg(V) = 4, \deg(\hat{q}) = 3$,且有 $\hat{q} = [x_1, x_2, x_3, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_1x_2^2, x_1x_2x_3, x_1x_3^2, x_1^2x_2, x_1^2x_3, x_1^3, x_2x_3^2, x_2^2x_3, x_2^3, x_3^3]^T \in \mathbf{R}^{19}$,其中 $\deg(\cdot)$ 表示变量的阶数.通过求解器 MOSEK 求解 SOS 条件(13)和(14),得到了一个常数 ϑ 和四阶的多项式 Lyapunov 函数,从而实现了系统的同步验证,其中, $\vartheta = 2.0, V(x_1, x_2, x_3) = 2.56236x_1^4 + 0.93299x_2^4 + 1.46639x_3^4 + 1.00369x_1^2x_2^2 + 0.937965x_1^2x_3^2 + 0.802985x_2^2x_3^2 + 6.57385x_1^2 + 2.59259x_2^2 + 2.55881x_3^2 - 0.011153x_1x_2 + 3.72347$.

根据定理 1 可知,如果耦合强度满足 $\sigma > \vartheta/a_\zeta(\mathbf{L}) = 0.723$,那么系统将实现同步.如图 1 所示,在耦合强度 $\sigma = 0.8$ 的情况下,系统的状态轨迹最终实现了同步,验证了理论结果.相比于基于二次型 Lyapunov 函数的方法(如文献[16,27-28])所建立的同步判据,所得的结果具有更弱的保守性,且通过一个较小的耦合强度下界便能够确保同步实现.

图1 状态轨迹演化过程 $x_i(t)$ Fig.1 State trajectories of $x_i(t)$

4 结 论

通过构造一般的 Lyapunov 函数,本文研究了有向拓扑结构下非线性耦合网络系统的同步问题.对于多项式网络系统,利用 SOS 优化方法自动地寻找弱保守的多项式 Lyapunov 函数,实现了系统同步验证.最后,给出了一个洛伦兹系统的仿真实例,验证了理论结果的有效性.在今后的研究中,将致力于推广所提出的 SOS 优化方法,研究异构多项式和非多项式网络系统的同步问题.

参 考 文 献

- [1] ARENAS A, DÍAZ-GUILERA A, KURTHS J, et al. Synchronization in complex networks[J]. Physics Reports, 2008, 469(3): 93-153.
- [2] CORNELIUS S P, KATH W L, MOTTER A E. Realistic control of network dynamics[J]. Nature Communications, 2013, 4: 1942.
- [3] XUAN Q, ZHANG Z Y, FU C B, et al. Social synchrony on complex networks[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2018, 48(5): 1420-1431.
- [4] BARAHONA M, PECORA L M. Synchronization in small-world systems[J]. Physical Review Letters, 2002, 89(5): 054101.
- [5] TANNER H G, JADBABAIE A, PAPPAS G J. Flocking in fixed and switching networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2007, 52(5): 863-868.
- [6] VICSEK T, CZIRÓK A, BEN-JACOB E, et al. Novel type of phase transition in a system of self-driven particles[J]. Physical Review Letters, 1995, 75(6): 1226-1229.
- [7] PANTELEY E, LORÍA A. Synchronization and dynamic consensus of heterogeneous networked systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(8): 3758-3773.
- [8] LIANG Q, SHE Z, WANG L, et al. Characterizations and criteria for synchronization of heterogeneous networks to linear subspaces[J]. SIAM J Control Optim, 2017, 55(6): 4048-4071.
- [9] WANG L, CHEN M Z Q, WANG Q G. Bounded synchronization of a heterogeneous complex switched network[J]. Automatica, 2015, 56: 19-24.
- [10] STILWELL D J, BOLLT E M, ROBERSON D G. Sufficient conditions for fast switching synchronization in time-varying network topologies[J]. SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, 2006, 5(1): 140-156.
- [11] QIN J H, MA Q C, YU X H, et al. On synchronization of dynamical systems over directed switching topologies: an algebraic and geometric perspective[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2020, 65(12): 5083-5098.
- [12] HE W L, CHEN G R, HAN Q L, et al. Multiagent systems on multilayer networks: synchronization analysis and network design[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2017, 47(7): 1655-1667.
- [13] PECORA L M, CARROLL T L. Master stability functions for synchronized coupled systems[J]. Physical Review Letters, 1998, 80(10):

2109-2112.

- [14] BELYKH V N, BELYKH I V, HASLER M. Connection graph stability method for synchronized coupled chaotic systems[J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2004, 195(1/2): 159-187.
- [15] DELELLIS P, DI BERNARDO M, RUSSO G. On QUAD, lipschitz, and contracting vector fields for consensus and synchronization of networks[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2011, 58(3): 576-583.
- [16] WEN G H, DUAN Z S, CHEN G R, et al. Consensus tracking of multi-agent systems with lipschitz-type node dynamics and switching topologies[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2014, 61(2): 499-511.
- [17] ZHANG Z, YAN W S, LI H P. Distributed optimal control for linear multiagent systems on general digraphs[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2021, 66(1): 322-328.
- [18] XIANG J, CHEN G R. On the V-stability of complex dynamical networks[J]. *Automatica*, 2007, 43(6): 1049-1057.
- [19] ZHAO J, HILL D J, LIU T. Stability of dynamical networks with non-identical nodes: a multiple V-Lyapunov function method[J]. *Automatica*, 2011, 47(12): 2615-2625.
- [20] PAPACHRISTODOULOU A, PRAJNA S. On the construction of Lyapunov functions using the sum of squares decomposition[C]// *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*. [s.l.]: IEEE, 2003: 3482-3487.
- [21] PAPACHRISTODOULOU A, PRAJNA S. A tutorial on sum of squares techniques for systems analysis[C]// *Proceedings of the 2005, American Control Conference*. [s.l.]: IEEE, 2005: 2686-2700.
- [22] ZHANG S Y, SONG S Z, WANG L, et al. Stability verification for heterogeneous complex networks via iterative SOS programming[J]. *IEEE Control Systems Letters*, 2023, 7: 559-564.
- [23] LIANG Q Y, SHE Z K, WANG L, et al. General Lyapunov functions for consensus of nonlinear multiagent systems[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2017, 64(10): 1232-1236.
- [24] ZHANG S Y, WANG L, LIANG Q Y, et al. Polynomial Lyapunov functions for synchronization of nonlinearly coupled complex networks[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2022, 52(3): 1812-1821.
- [25] LIANG Q Y, ONG C J, SHE Z K. Sum-of-squares-based consensus verification for directed networks with nonlinear protocols[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2020, 30(4): 1719-1732.
- [26] GODSIL C, ROYLE G. *Algebraic Graph Theory*[M]. New York: Springer-Verlag, 2001.
- [27] YU W W, CHEN G R, CAO M. Consensus in directed networks of agents with nonlinear dynamics[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(6): 1436-1441.
- [28] LIU X W, CHEN T P. Synchronization analysis for nonlinearly-coupled complex networks with an asymmetrical coupling matrix[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2008, 387(16/17): 4429-4439.
- [29] LOFBERG J. YALMIP: a toolbox for modeling and optimization in MATLAB[C]// *2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation (IEEE Cat.No.04CH37508)*. [s.l.]: IEEE, 2005: 284-289.
- [30] MOSEK A. The MOSEK optimization toolbox for MATLAB manual[EB/OL]. [2022-11-19]. <https://docs.mosek.com/7.0/toolbox/index.html>.

Synchronization verification for complex networked systems with directed graph

Wang Lei, Zhang Shuyuan, Ge Sitong, Liu Yang

(School of Automation Science and Electrical Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

Abstract: In this article, we study the problem of synchronization verification for complex networked systems with nonlinear coupling. Based on general form of Lyapunov functions, a less conservative synchronization criterion is proposed for the nonlinear networked systems with directed graph. Then, the synchronization problem for polynomial networked systems can be transformed into a sum-of-squares optimization problem, which falls within the convex optimization framework, yielding polynomial Lyapunov functions efficiently to realize the automatic synchronization verification in polynomial time. Finally, the effectiveness of the theoretical results is demonstrated by a simulation example, where the synchronization of Lorenz system is achieved by using a smaller lower bound of coupling strength.

Keywords: polynomial Lyapunov functions; synchronization verification; complex networked systems; sum-of-squares optimization

本期专家介绍



王磊,北京航空航天大学教授,博士生导师,国家级青年人才、浙江钱江特聘专家.长期从事集群系统控制与优化研究工作,围绕服务国家战略和国民经济重要领域的群体智能理论、自主协同控制与优化决策等需求,面向以多无人飞行器系统为代表的典型应用,形成了具有自身特色与优势的稳定研究方向.在 *Automatica*, *SIAM* 期刊, *IEEE* 汇刊等国际知名期刊发表高水平论文 80 余篇;授权国家发明专利 13 件(第一发明人 10 件),其中 1 件专利已成功转化;先后获得浙江省科学技术奖二等奖(排名 3, 2012 年)、中国仪器仪表学会技术发明二等奖(排名 1, 2020 年)、麒麟科学技术奖—优秀科技创新奖(排名 1, 2021 年)、中国仪器仪表学会技术发明一等奖(排名 5, 2022 年)、河南省教育厅科技成果奖一等奖(排名 2, 2023 年)等.受邀担任美国仪器、系统和自动化协会旗舰期刊 *ISA Transactions* 副编辑(Associate Editor)、《航空学报》编委等重要学术兼职.

王萌,河南师范大学教授,博士,硕士生导师.任中国电源学会无线电能传输技术及装置专业委员会委员,河南省电工技术学会理事,国家自然科学基金通信评审专家,教育部学位与研究生教育评审专家. *IEEE TIE*, *IEEE TIM*, *IEEE TPE*, *AEU-IJEC* 等 SCI 期刊审稿人.主要从事无线电能传输技术、电学检测与成像技术的研究,近年来,先后主持国家自然科学基金面上项目、河南省重点科技攻关项目、河南省自然科学基金面上项目以及服务于地方经济的横向项目等科研课题 8 项,在 *IEEE TIE*, *IEEE TIM*, *IEEE JESTPE*, *IEEE TII*, *IEEE MWCL*, 《电工技术学报》等多个国际和国内行业权威期刊发表 SCI/EI 检索学术论文 93 篇,以第一发明人在相关领域授权国家发明专利 25 件,并实现技术转让 6 件.



李仁辉,温州大学教授,温州市高层次引进人才 B 类杰出人才.1998 年取得日本筑波大学理学博士,1998 年 4 月至 2005 年 9 月分别在日本国立环境研究所,美国赖特州立大学,弗吉尼亚理工大学和田纳西大学从事博士后研究.2005 年 9 月入选中国科学院海外杰出引进人才“百人计划”.曾任中国科学院水生生物研究所藻类研究中心主任,二级研究员,博士生导师.研究的领域包括水体富营养化,有毒蓝藻水华和藻类异味,饮用水源地有害生物和污染物的检测以及水质安全保障等.主持和承担国家“973”课题,“十一五”,“十二五”和“十三五”国家水专项、国家自然科学基金等国家级项目以及受委托横向项目 60 余项(其中国家自然科学基金 8 项),广泛开展同美国、日本和澳大利亚的国际合作研究.受聘于多个省市的“蓝藻水华和饮用水问题及处理”的专家,担任中国藻类学会常务理事兼副秘书长,国际藻类杂志 *Phycologia* (SCI) 副主编, *Journal of Systematics and Evolution* (SCI) 的副主编, *Harmful Algae*, 《生物多样性》和《应用与环境生物学报》的编委等.发表学术论文 150 余篇,其中第一和通信作者的 SCI 论文 130 余篇,被引 3 300 余次, H 指数 34.