

切换线性系统在一类切换策略下的鲁棒稳定性分析

熊建栋,任志敏

(河南师范大学 数学与信息科学学院,河南 新乡 453007)

摘 要:针对一类子系统都不稳定的切换线性系统在一类混合切换法则下的鲁棒稳定性进行了研究.在适当的假设下,基于驻留时间和状态混合驱动的切换法则,系统的 Lyapunov 函数在切换时刻的衰减量可消除系统在驻留时间驱动下的增加量,从而使系统趋于稳定.另外,在适当的假设条件下,受扰的切换线性系统在一个改进的切换信号下具有良好的鲁棒稳定性.最后,一个数例仿真验证了切换设计的有效性.

关键词:切换线性系统;驻留时间;最小切换;镇定性;鲁棒性

中图分类号:O231.1

文献标志码:A

线性切换系统作为一类典型且又相对简单的切换系统,由有限个线性子系统和协调它们运行的切换法则组成.切换法则是切换系统的一个重要特性,对系统的稳定性往往有直接影响.即使切换系统的所有子系统都不稳定,通过选择适当的切换法则也可使系统稳定.因此,切换法则的设计是切换系统镇定性研究的一个重要分支^[1-5].

目前,切换系统稳定性问题主要可以分为 3 类:(1)切换系统在任意切换序列下的稳定性;(2)对于一些给定的受限类型切换序列,系统是否稳定;(3)构造切换序列使系统稳定,即镇定问题.其中,在切换序列是任意的或者是限定的情况下,已有很多学者对其稳定性进行了研究.在任意切换下,每一个稳定的子系统存在一个共同的 Lyapunov 函数为切换系统的稳定提供了充分必要条件^[6].但是,当某一类(个)切换法则给定时,由共同 Lyapunov 函数所确定的稳定性条件可能就会太过保守,这是因为很多切换系统都不存在共同的 Lyapunov 函数^[3-4,6].于是,在一些确定选择切换法则下的镇定性问题备受国内外学者关注.其中,多 Lyapunov 函数法是解决镇定性问题的常用方法^[7-8].

当切换系统的稳定性得到保证之后,其切换频率便是衡量其可行性的首要条件.因为在一些物理系统中,高频切换或抖动会缩短关键部件寿命甚至造成系统损坏.如数字传输网络^[9],输变电控制^[10-11]等.目前,许多学者的研究重点是如何设计使系统稳定且具有较低切换频率的切换法则.当所有的子系统都稳定时,MORSE 指出只要切换频率足够慢,就可保证系统稳定^[12].在此基础上,HESPANHA 等人指出只要系统在所有子系统的平均驻留时间足够大,即使系统在某个时间段有较高的切换频率,也可保证系统是指数稳定的^[13].当系统同时具有稳定子系统和不稳定子系统时,在考虑慢切换的同时还要求切换系统在不稳定的子系统上驻留的时间不能过长^[14-15].文献[16]在对状态空间分割的基础上设计了驻留时间切换法则,有效降低了执行器的切换频率.

但是上述的这些方法不适用于解决所有子系统都是不稳定的情况,本文针对这种情形进行了探讨.事实上,对于子系统是稳定的切换系统来讲,(平均)驻留时间切换法则的设计思想是:缓慢切换允许每次切换后的瞬态效应得到充分消耗.也就是说,在驻留时间内 Lyapunov 函数减少的量弥补了在切换时刻 Lyapunov

收稿日期:2017-01-21;**修回日期:**2017-09-13.

基金项目:国家自然科学基金(61603093);河南省科技攻关计划项目(062102210265);河南师范大学博士启动项目(qd13038).

作者简介:熊建栋(1982-),男,河南南阳人,河南师范大学讲师,博士,研究方向为切换系统的稳定性分析与切换设计,
E-mail: xiongjiandong@htu.edu.cn.

通信作者:任志敏, E-mail: renzhimin2016@qq.com.

函数可能增加的量.对于子系统都不稳定的切换系统,自然的就会考虑是否可以将驻留时间切换法则的设计思想反过来使用.也就是说,用在切换时刻 Lyapunov 函数减少的量弥补在驻留时间 Lyapunov 函数可能增加的量,这是可以实现的^[17-18].本文运用驻留时间与最小切换相结合的切换法则来研究在驻留时间限制下,子系统都不稳定的切换线性系统的鲁棒镇定性.特别地,多元二次型 Lyapunov 函数的稳定性条件将被放宽为在驻留时间内为非减的.而在切换时刻, Lyapunov 函数的减少量将通过依赖状态的切换法则被迫减小.

另外,切换法则对系统扰动的鲁棒性也是设计所关心的一个重要问题.对于依赖时间反馈的切换法则,系统只是简单地进行周期切换.而对于依赖状态反馈的切换法则,即使对标称系统良定的切换法则,在扰动下也可能出现抖振现象^[19].为了避免这种情况出现, SUN 将驻留时间切换法则和状态反馈切换法则结合起来,设计了一种具有较低切换频率的切换法则^[20],且该切换法则对外部扰动具有良好的鲁棒稳定性.但由于文献[20]采用的是一个共同 Lyapunov 函数,故具有一定的保守性.本文利用多 Lyapunov 函数法,在提出的混合切换法则下,驻留时间驱动环节的 Lyapunov 函数也允许增加,不仅降低了条件的保守程度,还可确保较低的切换频率.此外,在本文设计的切换法则下对应扰动系统也具有良好的鲁棒稳定性.

本文 $\mathbf{R}$ 表示实数集, $\mathbf{R}^{m \times n}$ 表示 $m \times n$ 维实矩阵, $\mathbf{S}^{n \times n}$ 表示 $n \times n$ 维实对称矩阵, 且 $\mathbf{S}_+^{n \times n}$ 表示正定的 $n \times n$ 维实对称矩阵, $\mathbf{I}$ 表示任意维单位矩阵.对于连续时间系统, M 表示一类梅茨勒矩阵的集合, $M = \{ \prod = (\pi_{ij})_{n \times n} : \pi_{ij} \geq 0, \forall i \neq j, \text{ 且 } \sum_{i=1}^n \pi_{ij} = 0 \}$.

1 预备知识

考虑如下的线性连续切换系统:

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}_{\sigma(t,x)} x(t), \quad (1)$$

其中: $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 是状态变量, $\sigma(t,x) \in \{1,2\}$ 是分段常值切换法则, $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是相应子系统的系统矩阵.

一般的,对于任意长度的时间段,切换的次数都是有限的,那么称切换法则是良定的.如果任意两个连续的切换时刻 t_k 和 t_{k+1} , 满足 $t_{k+1} - t_k \geq \tau_D$, 那么就称切换法则 σ 有驻留时间 τ_D .很明显,任意含有正的驻留时间的切换法则一定是良定的.

本文考虑系统(1)的子系统都是不稳定的,但满足如下假设 1.

假设 1 给定标量 $\mu > 1$, 存在正定矩阵 $\mathbf{P}_i \in \mathbf{S}_+^{n \times n}$ 和梅茨勒矩阵 $\prod \in M$, 使得

$$\mathbf{Q}_i = \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i + \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i < - \sum_{j=1, j \neq i}^2 \pi_{ji} (\mu \mathbf{P}_j - \mathbf{P}_i), i=1,2 \quad (2)$$

成立.

其中,(2)式是一组双线性矩阵不等式,是一类特殊的非凸优化问题.一种解决方法是对 π_{ij} 进行多维搜索,并对每个指定的 π_{ij} 求解线性矩阵不等式.另一种求解方法可根据文献[17]的思想,条件(2)可以通过假设梅茨勒矩阵具有相同的对角元素来进行简化,即 $-\pi_{ii} = \lambda_0, \forall i$, 并用 $\lambda_0 (\mu \mathbf{P}_j - \mathbf{P}_i)$ 来替代 $\sum_{j=1, j \neq i}^2 \pi_{ji} (\mu \mathbf{P}_j - \mathbf{P}_i)$, $\forall j$.因此,对于一个给定的 λ_0 , (2) 式简化成为一个线性矩阵不等式,可有效减少运算量.显然 $\lambda_0 > 0$.

对于线性切换系统(1),可选择类 Lyapunov 函数为

$$V(x(t)) := x^T(t) \mathbf{P}_i x(t), \quad (3)$$

其中, $\mathbf{P}_i$ 为假设 1 中(2)式的解.且令矩阵 $\mathbf{Q}_i = \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i + \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i, i=1,2$. 记 $\lambda_{i1}, \lambda_{in}$ 分别为正定矩阵 $\mathbf{P}_i$ 的最小和最大特征值.

2 主要结果

针对一类含驻留时间最小切换法则的切换线性系统,本节主要研究在该切换法则下,系统的稳定性及相应扰动系统的鲁棒稳定性.

2.1 切换法则及稳定性分析

对于所有子系统都是不稳定的切换系统,下述的定理表明,如果在每个切换瞬间,都能保证 Lyapunov 函数是减小的,并且驻留时间是足够小的,那么该切换系统的稳定性是可以保证的.这样的切换策略被称为驻留时间最小切换,形式如下:

$$\begin{cases} t_{k+1} = t_k + \tau_D + \Delta t, \text{若 } \sigma(t_k, x) = i, \\ \sigma(t_{k+1}, x) = \arg \min_{j \in \{1, 2\}} x^T(t_{k+1}) P_j x(t_{k+1}), \end{cases} \quad (4)$$

其中, $\Delta t = \inf\{t > t_k + \tau_D : x^T(t) P_i x(t) - \min_{j \in \{1, 2\}} \mu x^T(t) P_j x(t) \geq 0\} - t_k - \tau_D$, t_k 和 t_{k+1} 是两个相邻的切换时刻, $\tau_D > 0$ 是驻留时间,并且与最大的驻留时间 τ_D^* 之间满足关系: $\tau_D^* = \frac{\ln(\mu)}{\lambda_0} \geq \tau_D + \epsilon$, 且 $\epsilon > 0$.

若系统服从此切换法则,根据上述定义,系统将受一种基于时间和状态相混合的切换机制控制.对于任意非负的整数 k ,在时间区间 $[t_k, t_k + \tau_D)$ 和 $[t_{k+1}, t_{k+1} + \tau_D)$ 内,切换是受时间驱动的,与系统状态不直接相关.另一方面,在时间区间 $[t_k + \tau_D, t_{k+1})$ 及 $[t_{k+1} + \tau_D, t_{k+2})$ 内,切换是受状态驱动的,与系统的状态直接相关.

定理 1 当假设 1 成立时,那么在切换法则(4)的作用下,系统(1)是指数稳定的.

证明 首先,假设 $\sigma(t_0, x_0) = 1$, 其中 x_0 是系统在初始时刻 t_0 的初始状态,则时间区间 $[t_0, +\infty)$ 可分解成 $\bigcup_{k=0}^{+\infty} [t_k, t_{k+2}]$. 下面讨论系统在切换信号的一个信号周期 $[t_k, t_{k+2}]$ 内的情况:根据切换法则,在时间间隔 $[t_k + \tau_D, t_{k+1}) \cup [t_{k+1} + \tau_D, t_{k+2})$ 内,系统由状态反馈机制控制,因而这一时间段是状态驱动期.类似的, $[t_k, t_k + \tau_D) \cup [t_{k+1}, t_{k+1} + \tau_D)$ 是时间驱动期.

$$\text{由不等式(2)得 } \dot{V} = x^T(t) Q_i x(t) < -x^T(t) \sum_{j=1, j \neq i}^2 \pi_{ji} (\mu P_j - P_i) x(t) < x^T(t) \sum_{j=1, j \neq i}^2 \pi_{ji} P_i x(t) < \lambda_0 V,$$

其中, $\dot{V}$ 是 V 关于时间的导数, $\lambda_0 = -\min\{\pi_{ii}\}$.

当 $t \in [t_k, t_k + \tau_D) \cup [t_{k+1}, t_{k+1} + \tau_D)$ 时,分别在 $[t_k, t_k + \tau_D)$ 和 $[t_{k+1}, t_{k+1} + \tau_D)$ 上对上式积分得:

$$V(x(t_k + \tau_D)) < e^{\lambda_0 \tau_D} V(x(t_k)), \quad (5)$$

$$V(x(t_{k+1} + \tau_D)) < e^{\lambda_0 \tau_D} V(x(t_{k+1})). \quad (6)$$

另一方面,根据切换法则(4),当 $t \in [t_k + \tau_D, t_{k+1}) \cup [t_{k+1} + \tau_D, t_{k+2})$ 时,有 $\dot{V} < 0$. 从而,可得:

$$V(x(t_{k+1})) < V(x(t_k + \tau_D)), \quad (7)$$

$$V(x(t_{k+2})) < V(x(t_{k+1} + \tau_D)). \quad (8)$$

根据切换法则(4), $V(x(t))$ 在切换时刻满足

$$V(x(t_{k+1})) < \frac{1}{\mu} V(x(t_{k+1}^-)), \quad (9)$$

其中, $x(t_{k+1}^-) = \lim_{t \rightarrow t_{k+1}^-} x(t)$.

根据(5)~(9)式可得

$$V(x(t_{k+2})) < \frac{1}{\mu} V(x(t_{k+2}^-)) < e^{-\ln \mu} V(x(t_{k+1} + \tau_D)) < e^{-\ln \mu} e^{\lambda_0 \tau_D} V(x(t_{k+1})) <$$

$$e^{-\ln \mu} e^{\lambda_0 \tau_D} \mu^{-1} V(x(t_{k+1}^-)) < e^{\lambda_0 \tau_D} e^{-2 \ln \mu} V(x(t_k + \tau_D)) < e^{-2 \ln \mu} e^{2 \lambda_0 \tau_D} V(x(t_k)) = e^{-2(\ln \mu - \lambda_0 \tau_D)} V(x(t_k)),$$

显然,当 $\tau_D^* = \frac{\ln(\mu)}{\lambda_0} \geq \tau_D + \epsilon$ 时, $V(x(t_{k+2})) < e^{-2\lambda_0 \epsilon} V(x(t_k))$, 故指数稳定得以实现.注意到,如果 $\sigma(t_0, x_0) = 2$, 时间区间可分为 $[t_0, t_1] \cup (\bigcup_{k=1}^{+\infty} [t_k, t_{k+2}])$. 在 $[t_0, t_0 + \tau_D)$ 中, (6) 式成立; 而在 $[t_0 + \tau_D, t_1)$ 中, (8) 式成立.

注:与参考文献[20]相比,在本文提出的混合切换法则(4)下, Lyapunov 函数在每个子系统的驻留时间是允许增加的,虽然在一定程度上降低了条件的保守性,但是却也可能造成使该系统趋于稳定状态所需要的时间增长,这是不可避免的.

2.2 鲁棒性分析

本小节将研究如下的受扰系统:

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t,x)} x(t) + f_{\sigma(t,x)}(t), x(t_0) = x_0, \quad (10)$$

其中 $f_i: [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是系统扰动, 且 $f_i(\cdot)$ 是分段连续的.

定义 $N_f = \sup_{t \geq t_0} \{ \|f(t)\| \}$, 如果 $N_f < +\infty$, 那么称 $f(\cdot)$ 为有界; 如果 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|f(t)\| = 0$, 那么称 $f(\cdot)$ 为收敛; 如果存在正实数 α 及 β , 使得 $\|f(t)\| \leq \beta \exp(-\alpha(t-t_0)), \forall t \in [t_0, +\infty)$ 成立, 那么称 $f(\cdot)$ 为指数收敛.

另外, 由于系统存在扰动, 若系统在状态反馈机制环节持续时间过长, 系统的稳定性可能会遭到破坏, 故需要对切换法则(4)在状态反馈机制的时间加入限制. 修改的切换法则如下

$$\begin{cases} t_{k+1} = t_k + \tau_D + \Delta t, \text{若 } \sigma(t_k, x) = i, \\ \sigma(t_{k+1}, x) = \arg \min_{j \in \{1,2\}} x^T(t_{k+1}) \mathbf{P}_j x(t_{k+1}), \end{cases} \quad (11)$$

其中, $\Delta t = \min\{\inf\{t > t_k + \tau_D : x^T(t) \mathbf{P}_i x(t) - \min_{j \in \{1,2\}} \mu x^T(t) \mathbf{P}_j x(t) \geq 0\}, T_i\} - t_k - \tau_D$, 其中 t_k 和 t_{k+1} 是两个相邻的切换时刻. $\tau_D > 0$ 是驻留时间, 并且与最大的驻留时间 τ_D^* 之间满足这样的关系: $\tau_D^* = \frac{\ln(\mu)}{\lambda_0} \geq \tau_D + \epsilon$, 且 ϵ 满足 $\epsilon > \frac{\tau_D}{2\lambda_1}$. T_i 为第 i 个子系统受状态反馈机制驱动的最大时间, 并记 $T = T_1 +$

$T_2 < \eta \tau_D$, 且 $\eta = \frac{4\lambda_1 \epsilon}{\tau_D} - 2 > 0$. 关于系统的鲁棒性, 有如下结论.

定理 2 对于受扰系统(10), 若假设 1 成立, 那么在切换法则(11)作用下, 可得: i) 当扰动有界时, 系统状态有界; ii) 当扰动有界且收敛时, 系统状态有界且收敛; iii) 当扰动指数稳定时, 系统状态指数稳定.

证明 该证明的主要思路是: 首先构建系统状态关于初始状态和系统扰动的上界; 然后由上界的表达式证明 i) ~ iii).

由于 $\sigma(t_0) = 1$ 及 $\sigma(t_0) = 2$ 时, 证明过程类似, 因此本文只给出 $\sigma(t_0) = 1$ 时的证明.

对于二次型类 Lyapunov 函数(3), 它沿系统轨线的导数 $\frac{d}{dt}V(x(t)) = x^T(t) \mathbf{Q}_i x(t) + 2f_i^T(t) \mathbf{P}_i x(t)$.

引入如下符号 $p_i = \|\mathbf{P}_i\|$.

假设切换时间序列是 $\{t_0, t_1, t_2, \dots\}$, 固定一个切换时刻 t_k , 此时 $\sigma(t_k) = 1$. 由切换法则得, 在 $[t_k + \tau_D, t_{k+1}) \cup [t_{k+1} + \tau_D, t_{k+2})$ 区间上, 系统由状态反馈切换机制控制; 在 $[t_k, t_k + \tau_D) \cup [t_{k+1}, t_{k+1} + \tau_D)$ 区间上, 由时间驱动切换机制控制.

当 $t \in [t_k + \tau_D, t_{k+1}) \cup [t_{k+1} + \tau_D, t_{k+2})$, 且 $\|x(t)\| \geq \frac{4p_i}{\lambda_0} \|f_i(t)\|$ 时, 可得

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = x^T(t) \mathbf{Q}_i x(t) + 2f_i^T(t) \mathbf{P}_i x(t) < 2f_i^T(t) \mathbf{P}_i x(t) \leq \frac{\lambda_0}{2\lambda_{i1}} V(x(t)), \quad (12)$$

同样, 当 $[t_k, t_k + \tau_D) \cup [t_{k+1}, t_{k+1} + \tau_D)$, 且 $\|x(t)\| \geq \frac{4p_i}{\lambda_0} \|f_i(t)\|$ 时, 可得

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = x^T(t) \mathbf{Q}_i x(t) + 2f_i^T(t) \mathbf{P}_i x(t) < \lambda_0 V(x(t)) + 2f_i^T(t) \mathbf{P}_i x(t) \leq \frac{2\lambda_{i1}\lambda_0 + \lambda_0}{2\lambda_{i1}} V(x(t)), \quad (13)$$

为了便于本文之后的讨论, 令

$$\lambda_1 = \min_{i \in \{1,2\}} \lambda_{i1}, \lambda_n = \max_{i \in \{1,2\}} \lambda_{in}, \bar{\omega} = \mu^2 \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}, \gamma_1(t) = \max(\|x_0\| e^{-\frac{\lambda_0}{2\lambda_1} [\frac{2\lambda_1 \epsilon}{2\tau_D + T} - \frac{1}{2}](t-t_0)}, \frac{4p_i}{\lambda_0} \|f_i(t)\|).$$

显然, $\gamma_1(t)$ 是分段连续的. 进一步, 在 $\gamma_1(t)$ 不连续处重新定义, 使其左连续, 可得:

$$\|x(t)\| \leq \gamma(t) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\omega} \sup_{\zeta \in [t_0, t]} \gamma_1(\zeta) e^{-\frac{\lambda_0}{2\lambda_1} [\frac{2\lambda_1 \epsilon}{2\tau_D + T} - \frac{1}{2}](t-\zeta)}, \forall t \geq t_0. \quad (14)$$

对于(14)式, 当 $\epsilon > \frac{\tau_D}{2\lambda_1}, \eta = \frac{4\lambda_1 \epsilon}{\tau_D} - 2 > 0, T < \eta \tau_D$ 时, 可得 $\frac{2\lambda_1 \epsilon}{2\tau_D + T} - \frac{1}{2} > 0$. 根据反证法, 假设(14)式不成立, 那么必在某个时刻 $t_* > t_0$, 有 $\|x(t_*)\| > \gamma(t_*)$. 由于 $\|x_0\| \leq \gamma_1(t_0)$, 并根据系统状态的连续性, 必然存在某一时刻 $s \in [t_0, t_*)$ 使得下列不等式同时成立:

$$\begin{cases} \|x(s)\| \leq \gamma_1(s), \\ \|x(t)\| \geq \gamma_1(t), \forall t \in (s, t_*]. \end{cases} \quad (15)$$

同时,也必定存在正整数 k ,使得 $s \in [t_k, t_{k+2})$. 结合不等式(12),可得

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) < \frac{\lambda_0}{2\lambda_{i1}}V(x(t)), \quad (16)$$

对 $\forall t \in (s, t_*] \cap ([t_k + \tau_D, t_{k+1}) \cup [t_{k+1} + \tau_D, t_{k+2}))$ 成立;同理,由不等式(13)可得

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) < \frac{2\lambda_{i1}\lambda_0 + \lambda_0}{2\lambda_{i1}}V(x(t)) < \frac{\lambda_0}{2\lambda_{i1}}V(x(t)) + \lambda_0V(x(t)), \quad (17)$$

对 $\forall t \in (s, t_*] \cap ([t_k, t_k + \tau_D) \cup [t_{k+1}, t_{k+1} + \tau_D))$ 成立.

因此,对于 $s_1, s_2 \in (s, t_*] \cap [t_k, t_{k+1})$, 根据(16)~(17)式可得

$$V(x(s_2)) < e^{\frac{\lambda_0}{2\lambda_{i1}}(s_2 - t_k - \tau_D)}V(x(t_k + \tau_D)) < e^{\frac{\lambda_0}{2\lambda_{i1}}(s_2 - t_k - \tau_D)}e^{\frac{\lambda_0}{2\lambda_{i1}}(t_k + \tau_D - s_1)}e^{\lambda_0(t_k + \tau_D - s_1)}V(x(s_1)) \leq e^{\frac{\lambda_0}{2\lambda_{i1}}(s_2 - s_1)}e^{\lambda_0\tau_D}V(x(s_1)).$$

同理,对于 $s_1, s_2 \in (s, t_*] \cap [t_{k+1}, t_{k+2})$, 有 $V(x(s_2)) < e^{\frac{\lambda_0}{2\lambda_{i1}}(s_2 - s_1)}e^{\lambda_0\tau_D}V(x(s_1))$, 故对于 $s_1, s_2 \in (s, t_*] \cap [t_k, t_{k+2})$, 可得

$$\begin{aligned} V(x(s_2)) &< e^{\frac{\lambda_0}{2\lambda_{i1}}(s_2 - t_{k+1} - \tau_D)}V(x(t_{k+1} + \tau_D)) < e^{\frac{\lambda_0}{2\lambda_{i1}}(s_2 - t_{k+1} - \tau_D)}e^{\frac{\lambda_0}{2\lambda_{i1}}\tau_D}e^{\lambda_0\tau_D}V(x(t_{k+1})) < \\ &e^{\frac{\lambda_0}{2\lambda_{i1}}(s_2 - t_{k+1} - \tau_D)}e^{\frac{\lambda_0}{2\lambda_{i1}}\tau_D}e^{\lambda_0\tau_D}e^{\frac{\lambda_0}{2\lambda_{i1}}(t_{k+1} - t_k - \tau_D)}e^{\frac{\lambda_0}{2\lambda_{i1}}(t_k + \tau_D - s_1)}e^{\lambda_0\tau_D}V(x(s_1)) < e^{\frac{\lambda_0}{2\lambda_{i1}}(s_2 - s_1)}e^{2\lambda_0\tau_D}V(x(s_1)), \end{aligned} \quad (18)$$

且

$$V(x(t_{k+2})) < e^{-2\ln \mu}e^{\frac{\lambda_0}{2\lambda_{i1}}(t_{k+2} - t_k)}e^{2\lambda_0\tau_D}V(x(t_k)). \quad (19)$$

如果 $t_* > t_{k+2}$, 令 l 为满足 $t_* > t_{k+2l}$ 的最大非负整数. 类似的结论为:

$$V(x(t_{k+2l})) < e^{-2(l-1)\ln \mu}e^{\frac{\lambda_0}{2\lambda_{i1}}(t_{k+2l} - t_{k+2})}e^{2(l-1)\lambda_0\tau_D}V(x(t_{k+2})), V(x(t_*)) < e^{\frac{\lambda_0}{2\lambda_{i1}}(t_* - t_{k+2l})}e^{2\lambda_0\tau_D}V(x(t_{k+2l})).$$

综上可得 $V(x(t_*)) < e^{-2(l-1)\ln \mu}e^{\frac{\lambda_0}{2\lambda_{i1}}(t_* - s)}e^{2(l+1)\lambda_0\tau_D}V(x(s))$, 因此,可推出如下结论

$$\begin{aligned} \|x(t_*)\|^2 &\leq \frac{1}{\lambda_1}V(x(t_*)) \leq \frac{1}{\lambda_1}e^{-2(l-1)\ln \mu}e^{\frac{\lambda_0}{2\lambda_{i1}}(t_* - s)}e^{2(l+1)\lambda_0\tau_D}V(x(s)) \leq \\ \frac{\lambda_n}{\lambda_1}e^{-2(l-1)\ln \mu}e^{\frac{\lambda_0}{2\lambda_{i1}}(t_* - s)}e^{2(l+1)\lambda_0\tau_D}\gamma_1^2(s) &= \frac{\lambda_n}{\lambda_1}e^{4\ln \mu}e^{-2(l+1)(\ln \mu - \lambda_0\tau_D)}e^{\frac{\lambda_0}{2\lambda_{i1}}(t_* - s)}\gamma_1^2(s) \leq \\ \frac{\lambda_n}{\lambda_1}e^{4\ln \mu}e^{-2(l+1)\lambda_0\epsilon}e^{\frac{\lambda_0}{2\lambda_{i1}}(t_* - s)}\gamma_1^2(s) &\leq \frac{\lambda_n}{\lambda_1}e^{4\ln \mu}e^{\frac{2\lambda_0\epsilon}{2\tau_D + T}(t_* - s)}e^{\frac{\lambda_0}{2\lambda_{i1}}(t_* - s)}\gamma_1^2(s) = \\ \frac{\lambda_n}{\lambda_1}e^{4\ln \mu}e^{\frac{\lambda_0}{2\lambda_{i1}}[\frac{2\lambda_1\epsilon}{2\tau_D + T} - \frac{1}{2}](t_* - s)}\gamma_1^2(s) &\leq \gamma^2(t_*). \end{aligned}$$

上式和假设 $\|x(t_*)\| > \gamma(t_*) > \gamma_1(t_*)$ 矛盾. 因此,可推得不等式(14)成立.

最后,由(14)式可推导 i)~iii).

i) 由于扰动有界,即存在 $N_f > 0$ 使得 $\|f_i(t)\| \leq N_f$. 很明显, $\gamma_1(t) \leq \max(\|x_0\|, \frac{4p_i}{\lambda_0}N_f)$, $\forall t \geq t_0$, 因此,系统状态有界: $\|x(t)\| \leq \bar{\omega} \sup_{[t_0, t]} \gamma_1(t) \leq \bar{\omega} \max(\|x_0\|, \frac{4p_i}{\lambda_0}N_f)$. 得证.

ii) 假设 $f_i(t)$ 是有界和收敛的,对于任意给定正数 $\delta < N_f$, 存在时刻 $N \geq t_0$, 使得 $\|x_0\| \leq \frac{\delta}{\bar{\omega}}e^{\frac{\lambda_0}{2\lambda_{i1}}[\frac{2\lambda_1\epsilon}{2\tau_D + T} - \frac{1}{2}](t - t_0)}$, $\|f(t)\| \leq \frac{\lambda_0}{4p_i}\frac{\delta}{\bar{\omega}}$, $\forall t \geq N$. 进一步推得,对于任意给定的 δ , 存在 $N \geq t_0$, 满足下式 $\|x(t)\| \leq \gamma(t) \leq \delta$, $\forall t \geq N$. 由于 δ 的任意性,可推得系统状态的收敛性.

iii) 对于扰动指数收敛的情形,假设 $\|f_i(t)\| \leq \beta e^{-\alpha(t - t_0)}$ 其中 α 和 β 为正实数. 对于 $\forall t \geq t_0$, 有 $\|x(t)\| \leq \bar{\omega} \max(\|x_0\|, \frac{4p_i}{\lambda_0}\beta)e^{-\min[\frac{\lambda_0}{2\lambda_{i1}}[\frac{2\lambda_1\epsilon}{2\tau_D + T} - \frac{1}{2}], \alpha](t - t_0)}$, $t \geq t_0$, 因此系统状态指数稳定.

3 数例仿真

考虑一个三阶线性切换系统,其系统矩阵分别为

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2.0 & 1.4 & 5.9 \\ -8.0 & -5.7 & -0.2 \\ 0.6 & 5.8 & 1.6 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1.0 & -0.5 & -2.8 \\ 4.8 & -5.0 & 1.1 \\ -1.0 & -6.6 & -2.1 \end{bmatrix},$$

取 $\mu = 1.9, \lambda_0 = 3$, 经过计算可知, $\tau_D = 0.214$.

首先,假设系统初始状态为 $x_0 = [1, 0.3, -1]^T$. 在切换法则(4) 作用下的系统状态轨线和切换信号如图 1 所示. 利用参考文献[20] 中的切换法则(3), 选用参数 $r_1 = r_2 = 0.1, \tau_1 = 0.029\ 6, \tau_2 = 0.050\ 4$. 经验证知, 系统在 8 s 内切换了 84 次, 系统状态轨线和切换信号如图 2 所示. 而采用了本文所使用的切换法则后, 8 s 内切换了 30 次, 切换频率明显下降.

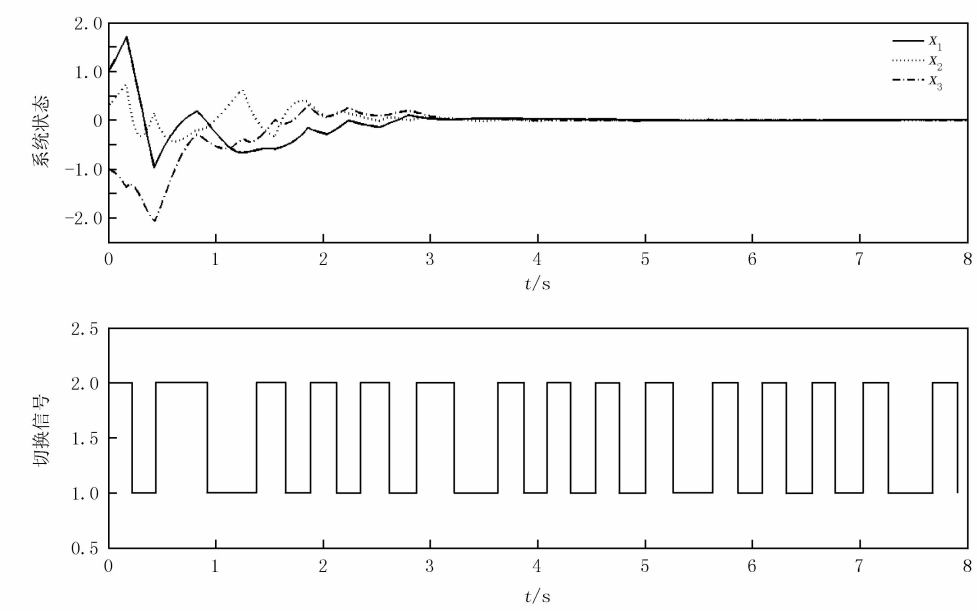


图1 切换法则(4) 下的状态轨线和切换信号

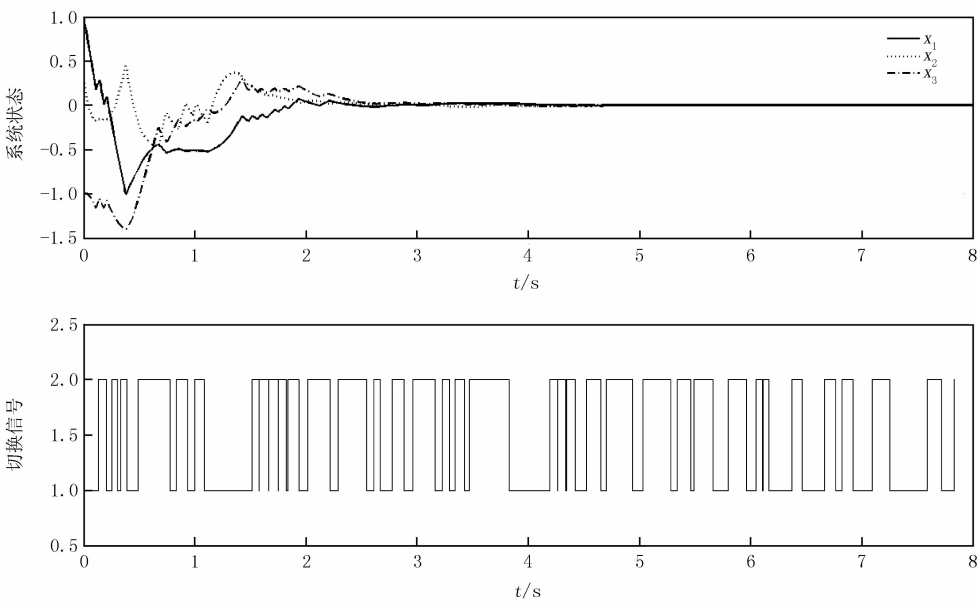


图2 在文献[20] 切换法则(3) 下的状态轨线和切换信号

接下来,考察系统受外界扰动的情形.设系统外部扰动分别为

$$f_1(t) = [-t \exp(-t), \sin(2t), -0.5]^T, f_2(t) = [0.5 \operatorname{sat}(t-1), \operatorname{sgn}(\cos t), -\frac{1}{1+t}]^T,$$
$$\bar{f}_i(t) = \frac{1}{1+t} f_i(t), i = 1, 2.$$

显然 f_i 有界而 $\bar{f}_i$ 收敛.图 3 和图 4 分别是带有界扰动 f 和收敛扰动 $\bar{f}$ 的系统在切换法则(11)下的状态轨线,和本文结论相符.

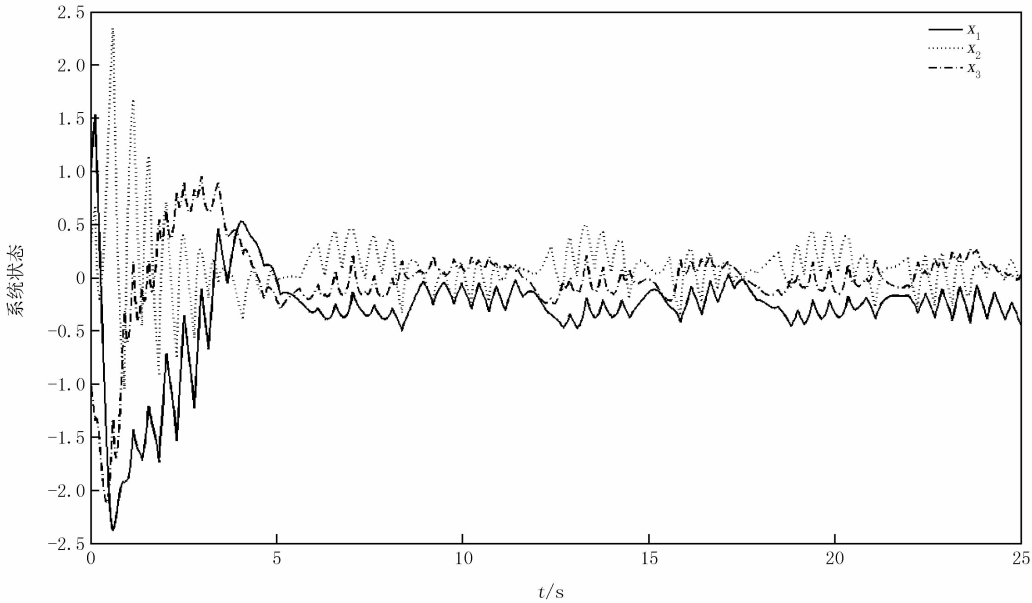


图 3 带有界扰动的系统 (10) 在切换法则 (11) 下的状态轨线

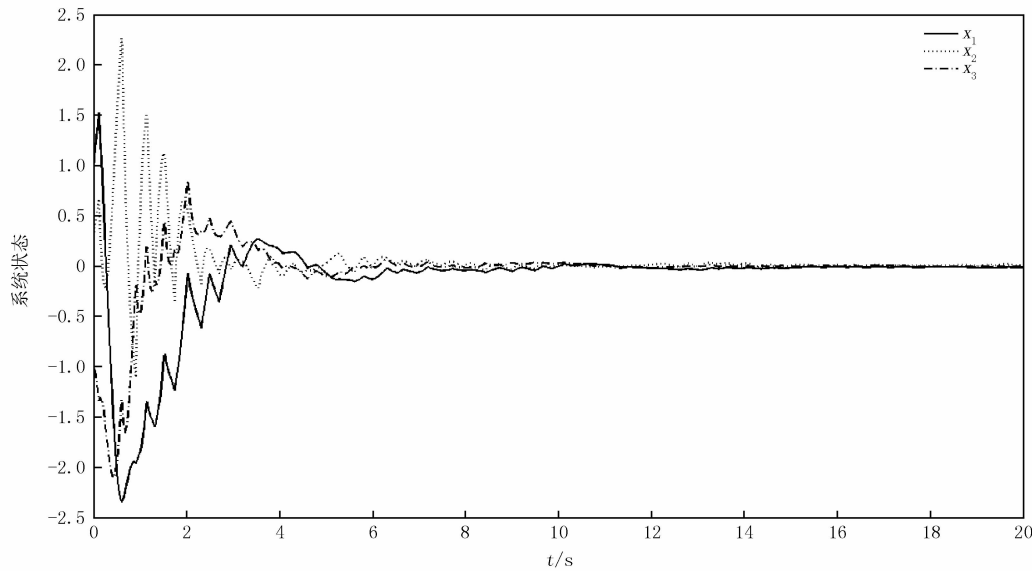


图 4 带收敛扰动的系统 (10) 在切换法则 (11) 下的状态轨线

4 结 论

本文研究了切换线性系统的鲁棒稳定性问题.在选取的切换法则下,不仅保证了线性系统的稳定性,也具有有良好的鲁棒性.虽然在本篇论文中仅验证了含有两个不稳定子系统的切换线性系统的稳定性问题,但很

明显是可以推广到含有多个不稳定子系统的情况.并且,多元二次型 Lyapunov 函数的稳定性条件也被放宽为在驻留时间内为非减的.而在切换时刻, Lyapunov 函数将通过依赖状态的切换法则被迫减小.之后又通过修改切换法则,验证了其鲁棒性.最后数例仿真验证了切换法则的有效性.

参 考 文 献

[1] 程代展,郭宇骞.切换系统进展[J].控制理论与应用,2005,22(6):954-960 .

[2] SUN Z D,GE S S.Analysis and synthesis of switched linear control systems[J].Automatica,2005,41(2):181-195.

[3] LIBERZON D.Switching in systems and conrol[M].Boston:Birkhäuser,2003.

[4] Cheng D Z,Guo L,Lin Y D,et al.Stabilization of switched linear systems[J].IEEE Transactions on Automatic Control,2005,50(5):661-666.

[5] 孙剑,可欣荣,张建瓴,等.基于 CC1100 的土壤湿度监测与控制系统[J].灌溉排水学报,2015,34(6):99-103.

[6] SUN Z D,GE S S.Stability theory of switched dynamical systems[M].London:Springer,2011.

[7] BRANICKY M S.Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems[J].IEEE Transactions on Automatic Control,1998,43(4):475-482.

[8] 丛岫,费树岷,李涛.时滞切换系统指数稳定性分析:多 Lyapunov 函数方法[J].自动化学报,2007,33(9):985-988.

[9] 熊建栋,刘永奇,沈志萍,等.连续线性切换系统的镇定慢切换设计[J].控制与决策,2016,31(05):797-804.

[10] 张栋梁,谢业华,刘娟,等.基于遗传算法的有源电力滤波器滑模控制[J].电力系统保护与控制,2016,44(5):69-74.

[11] 张立奎,张英敏.混合多端直流输电系统附加控制器设计[J].电力系统保护与控制,2016,44(2):128-133.

[12] MORSE A S.Supervisory control of families of linear setpoint controllers-Part 1:Exact matching[J].IEEE Transactions on Automatic Control,1996,41(10):1413-1431.

[13] HESPANHA J P,MORSE A S.Stability of switched systems with average dwell-time[C].Proceedings of 38th IEEE Conference on Decision and Control Phoenix:IEEE,1999:2655-2660.

[14] ZHAI G,HU B,YASUDA K,et al.Disturbance attenuation properties of time-controlled switched systems[J].Journal of Franklin Institute,2001,338(7):765-779.

[15] ZHAI G,HU B,YASUDA K,et al.Qualitative analysis of discrete-time switched systems[C].Proceedings of American Control Conference.Anchorage AK:IEEE,2002:1880-1885.

[16] ISHII H,FRANCIS B A.Stabilizing a linear system by switching control with dwell time[J].IEEE Transactions on Automatic Control,2002,47(12):1962-1973.

[17] DUAN C,WU F .Analysis and control of switched linear systems via modified Lyapunov-Metzler inequalities[J].International Journal of Robust & Nonlinear Control,2014,24:276-294.

[18] DUAN C,WU F .Analysis and control of switched linear systems via dwell-time min-switched[J].Systems & Control Letters,2014,70:8-16.

[19] SUN Z D.A robust stabilizing law for switched linear systems[J].International Journal Control,2004,77(4):389-398.

[20] SUN Z D.Combining stabilizing strategies for switched linear systems[J].IEEE Transactions on Automatic Control,2006,51(4):666-674.

Robust stability analysis of a class of switched linear systems under a switching strategy

Xiong Jiandong, Ren Zhimin

(School of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)

Abstract: In this paper, the robust stability of a switched linear system with unstable subsystems is investigated under a class of combined switching strategies. Under the dwell-time driven and state-driven combined switching laws, the Lyapunov function is attenuated at the switching instant. With proper assumptions, the attenuation can eliminate the increased amount during the dwell-time driven loop, which leads to the exponential stability. Furthermore, under proper conditions, the perturbed switched linear systems have good robust stability with a modified switching law. At the end, a numerical example verified the effectiveness of the switching designs.

Keywords: switched linear system; dwell-time; min-switching; stabilization; robustness