

一类扰动线性方程组的迭代学习控制求解方法

李钧涛¹, 梁聪¹, 汤永²

(1.河南师范大学 数学与信息科学学院,河南 新乡 453007;2.新乡航空工业(集团)有限公司,河南 新乡 453003)

摘要:针对一类系数矩阵中含有扰动的线性方程组,提出了一种基于迭代学习控制的求解方法.首先将扰动线性方程组的求解问题转化为线性离散不确定系统的可镇定性问题;接着给出了扰动线性方程组有解的一个充分条件.然后,通过 Lyapunov 函数设计状态反馈控制器,得到确定迭代学习控制系统的学习律,并获得不确定系统跟踪误差的上界及扰动线性方程组的近似解.最后仿真实验验证了所提求解方法的有效性.

关键词:扰动线性方程组;迭代学习;状态反馈

中图分类号:TP271.8

文献标志码:A

线性方程组已广泛应用于计算机科学、工程科学等诸多领域^[1-2].许多科学领域中的难题,比如分数阶积分微分方程的求解,机器人的控制方案设计等均能简化为线性方程组的求解问题^[3-4].一般而言,线性方程组的求解方法主要有直接法和迭代法.在线性方程组有解的情况下,可以通过直接法,如对线性方程组的系数矩阵进行 Gauss 消元或 Cholesky 分解等来求解^[5-6].迭代法具有节省大量存储和计算资源的优点,对于大规模线性方程组,一般选择迭代法求解^[7-8].

在现实科学研究中,线性方程组系数矩阵的元素是由物理测量或科学仪器收集得到的,这使得系数矩阵中可能含有一定的扰动^[9].例如一些网络系统不可避免地存在网络诱导时延、数据包丢失和环境干扰等问题^[10].由于扰动的不确定性,导致无法利用直接法求解系数矩阵中含有扰动的线性方程组.经典的迭代法,如 Jacobi, Gauss-Seidel 等方法是基于系数矩阵分裂所发展的迭代法^[11].当系数矩阵中含有扰动时,通过系数矩阵分裂得到的迭代式无法进行迭代更新.文献[12-13]利用随机 Kaczmarz 迭代法分别给出了当线性方程组右端向量含有扰动时的迭代解与真实解的期望误差界.Kaczmarz 迭代法通过利用系数矩阵的行向量进行迭代更新,其不能应用于系数矩阵中含有扰动的线性方程组的求解.

从控制理论的角度研究线性方程组求解是当前信息科学领域的一个热门研究问题.文献[14-15]利用控制理论研究数值分析中一些基本的线性及非线性迭代方法,并从控制的角度说明了如何设计求解线性或非线性方程组的标准迭代方法.文献[16]通过最优控制设计,得到了线性方程组的全局收敛算法.文献[17]引入迭代学习控制(Iterative Learning Control, ILC)的思想,通过线性离散系统的状态反馈设计出迭代更新律,并最终得到线性方程组的所有解.以上文献表明,控制设计与分析已成功运用于线性方程组的迭代求解.然而,上述方法均未考虑系数矩阵中含有扰动的线性方程组求解问题.

本文针对一类系数矩阵中含有扰动的线性方程组,通过构建确定和不确定 ILC 系统,将扰动线性方程组的求解问题转化为线性离散不确定系统的可镇定性问题,进而设计出迭代学习控制律,获得了扰动线性方程组的近似解.

1 问题描述

对于如下形式的线性方程组

收稿日期:2022-04-07;修回日期:2022-09-06.

基金项目:国家自然科学基金(61203293);河南省科技攻关计划(212102210140).

作者简介(通信作者):李钧涛(1978—),男,河南社旗人,河南师范大学教授,博士,研究方向为数据驱动建模与控制、统计学习, E-mail:juntaol@mail@126.com.

$$\mathbf{B}\mathbf{U}=\mathbf{Y}, \quad (1)$$

其中系数矩阵 $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times m}$, 向量 $\mathbf{U}, \mathbf{Y}$ 分别属于 $\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n$. 本文考虑一类系数矩阵含有扰动的线性方程组

$$\mathbf{B}(\mathbf{I} + \Delta\mathbf{B})\mathbf{U}=\mathbf{Y}, \quad (2)$$

其中 $\Delta\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{m \times m}$ 为扰动矩阵.

线性方程组(1)解的存在性可根据代数学方法来判定. 在有解的情况下, 可通过直接法或迭代法来获得线性方程组的解. 由于系数矩阵存在扰动, 上述方法难以用来探讨扰动线性方程组(2)的解的存在性及求解过程.

为了解决上述问题, 构建如下不确定迭代学习控制(ILC)系统:

$$\mathbf{B}(\mathbf{I} + \Delta\mathbf{B})\mathbf{U}_k=\mathbf{Y}_k, \quad (3)$$

其中 $\mathbf{U}_k$ 为输入, $\mathbf{Y}_k$ 为输出. 那么扰动线性方程组(2)有解等价于设计输入序列 $\{\mathbf{U}_k; k \in \mathbf{Z}_+\}$, 使得输出序列 $\{\mathbf{Y}_k; k \in \mathbf{Z}_+\}$ 达到跟踪目标

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{Y}_k = \mathbf{Y}. \quad (4)$$

令系统(3)的跟踪误差为 $x_k = \mathbf{Y} - \mathbf{Y}_k$, 输入序列与输出序列差值分别为 $\Delta\mathbf{U}_k = -\mathbf{u}_k = \mathbf{U}_{k+1} - \mathbf{U}_k$, $\Delta\mathbf{Y}_k = \mathbf{Y}_{k+1} - \mathbf{Y}_k$. 根据文献[17], 不确定 ILC 系统(3)达到跟踪目标(4)等价于线性不确定离散系统

$$x_{k+1} = x_k + \mathbf{B}(\mathbf{I} + \Delta\mathbf{B})\mathbf{u}_k \quad (5)$$

是可镇定的.

本文致力于探究线性不确定离散系统(5)的可镇定性条件, 获得扰动线性方程组(2)有解的判定条件, 并设计迭代学习控制律来求其近似解.

2 预备知识

以下是本文推导过程中所用到的一些引理.

令线性方程组(1)系数矩阵 $\mathbf{B}$ 的秩为 r . 进一步假设由矩阵 $\mathbf{B}$ 的列向量构成的线性空间 $\text{span}(\mathbf{B})$ 的一组基为 $h_1, h_2, \dots, h_r \in \mathbf{R}^n$, 并令 $\mathbf{H}_1$ 为这组基构成的矩阵. 选择 $\mathbf{R}^n$ 中 $n-r$ 个向量构成矩阵 $\mathbf{H}_2$, 使得矩阵 $\mathbf{H} = [\mathbf{H}_1 \quad \mathbf{H}_2] \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 可逆, 即存在矩阵 $\mathbf{F} = [\mathbf{F}_1 \quad \mathbf{F}_2]^T$ 使得下式成立

$$\mathbf{F}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1^T \mathbf{H}_1 & \mathbf{F}_1^T \mathbf{H}_2 \\ \mathbf{F}_2^T \mathbf{H}_1 & \mathbf{F}_2^T \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

利用定义的 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{F}$, 有如下引理 1 和 2.

引理 1^[17] $\text{span}(\mathbf{B}) \oplus \text{span}(\mathbf{F}_2) = \mathbf{R}^n$.

引理 2^[17] 若线性方程组 $\mathbf{B}\mathbf{U}=\mathbf{Y}$ 有解, 则确定 ILC 系统 $\mathbf{B}\mathbf{U}_k=\mathbf{Y}_k$ 在学习律 $\mathbf{U}_{k+1}=\mathbf{U}_k+\mathbf{K}(\mathbf{Y}-\mathbf{Y}_k)$ 下达到跟踪目标 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{Y}_k = \mathbf{Y}$. 对于任意选取的初始向量 $\mathbf{U}_0$, 在学习律下产生的输入序列 $\{\mathbf{U}_k; k \in \mathbf{Z}_+\}$ 收敛于如下集合中的元素

$$\Theta_{\text{ILC}}(\mathbf{Y}) = \{\mathbf{U}_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{U}_k = [\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H}_1(\mathbf{F}_1^T \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{H}_1)^{-1} \mathbf{F}_1^T \mathbf{B}] \mathbf{U}_0 + \mathbf{K}\mathbf{H}_1(\mathbf{F}_1^T \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{H}_1)^{-1} \mathbf{F}_1^T \mathbf{Y} \mid \mathbf{U}_0 \in \mathbf{R}^m\}.$$

其中 $\mathbf{K}$ 满足: $\mathbf{K}=\mathbf{K}\mathbf{F}_1^T$, 谱半径 $\rho(\mathbf{I} - \mathbf{F}_1^T \mathbf{B}\mathbf{K}) < 1$.

注 1 引理 2 表明, 对于不含扰动的线性方程组, 利用确定 ILC 系统的学习律得到的输入序列 $\{\mathbf{U}_k; k \in \mathbf{Z}_+\}$ 收敛于线性方程组的解, 并通过任意选取初始向量 $\mathbf{U}_0$, 得到线性方程组的所有解.

引理 3^[18] 设 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是非奇异矩阵. 若 $\|\mathbf{A}^{-1}\|_2 \|\mathbf{D}\|_2 < 1$, 则 $\mathbf{A} + \mathbf{D}$ 是非奇异矩阵.

3 主要结果

3.1 扰动线性方程组有解的判定

由于线性不确定离散系统(5)的状态矩阵是单位矩阵, 所以其能控型矩阵 $\mathbf{C} = [\mathbf{B}(\mathbf{I} + \Delta\mathbf{B}) \quad \mathbf{B}(\mathbf{I} + \Delta\mathbf{B}) \quad \cdots \quad \mathbf{B}(\mathbf{I} + \Delta\mathbf{B})]$ 的秩等于矩阵 $\mathbf{B}(\mathbf{I} + \Delta\mathbf{B})$ 的秩. 当矩阵 $\mathbf{C}$ 行满秩(即 $\text{rank}(\mathbf{C}) = \text{rank}(\mathbf{B}(\mathbf{I} + \Delta\mathbf{B})) = n$) 时系统(5)完全能控. 接下来探讨扰动矩阵 $\Delta\mathbf{B}$ 满足的条件, 进而通过矩阵 $\mathbf{B}$ 的秩来判定系统(5)的能控

性,即扰动方程组(2)解的存在性.

定理 1 若 $Y \in \text{span}(\mathbf{B})$, 且 $\|\Delta\mathbf{B}\|_2 < 1$, 则扰动线性方程组(2)有解.

证明 根据引理 3, 当 $\|\Delta\mathbf{B}\|_2 < 1$ 时, 矩阵 $\mathbf{I} + \Delta\mathbf{B}$ 可逆, 且 $\text{rank}(\mathbf{B}(\mathbf{I} + \Delta\mathbf{B})) = \text{rank}(\mathbf{B})$. 当 $\text{rank}(\mathbf{B}) = n$ 时, 易知系统(5) 完全能控, 所以扰动线性方程组(2) 有解. 当 $\text{rank}(\mathbf{B}) < n$ 时, 易知系统(5) 不完全能控. 令 $\bar{x}_k = \mathbf{F}x_k = [\mathbf{F}_1 \quad \mathbf{F}_2]^T x_k$. 根据卡尔曼分解和引理 1 可得:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_{k+1}^C \\ \bar{x}_{k+1}^{NC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_k^C \\ \bar{x}_k^{NC} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1^T \mathbf{B}(\mathbf{I} + \Delta\mathbf{B})u_k \\ \mathbf{F}_2^T \mathbf{B}(\mathbf{I} + \Delta\mathbf{B})u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_k^C \\ \bar{x}_k^{NC} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1^T \mathbf{B}(\mathbf{I} + \Delta\mathbf{B})u_k \\ O \end{bmatrix}.$$

因为 $Y \in \text{span}(\mathbf{B})$, 所以 $\bar{x}_{k+1}^{NC} = \bar{x}_k^{NC} = \mathbf{F}_2^T(Y - Y_k) = \mathbf{F}_2^T Y = 0, \forall k \in \mathbf{Z}_+$. 由于矩阵 $\mathbf{F}_2^T \mathbf{B}(\mathbf{I} + \Delta\mathbf{B})$ 是行满秩的, 所以子系统

$$\bar{x}_{k+1}^C = \bar{x}_k^C + \mathbf{F}_1^T \mathbf{B}(\mathbf{I} + \Delta\mathbf{B})u_k \quad (6)$$

完全能控, 即存在状态反馈 $u_k = -\bar{\mathbf{K}}\bar{x}_k^C$, 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}_k^C = 0$. 进一步结合 $\bar{x}_k^{NC} = 0$, 可得:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{H}\bar{x}_k = \lim_{k \rightarrow \infty} [\mathbf{H}_1 \bar{x}_k^C \quad \mathbf{H}_2 \bar{x}_k^{NC}] = 0.$$

于是系统(5)可镇定, 扰动线性方程组(2)有解.

注 2 对于一个不完全能控的线性离散系统, 当其不能控部分稳定时, 则该系统是可镇定的. 本文中的线性不确定离散系统(5)的状态矩阵是单位矩阵, 故只需让不能控部分的状态始终为 0 即可保证系统是稳定的.

3.2 扰动线性方程组的迭代学习控制求解

根据定理 1, 系统(5)存在状态反馈 $u_k = -\bar{\mathbf{K}}\bar{x}_k^C = -\bar{\mathbf{K}}\mathbf{F}_1^T x_k$, 使得跟踪误差 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (Y - Y_k) = 0$. 但由于不确定 ILC 系统(3) 中含有扰动($\Delta\mathbf{B}$ 未知), 所以利用线性离散不确定系统(5) 的状态反馈控制而设计的学习律中也将含有扰动, 进而无法对任意选取的初始输入 U_0 进行迭代更新. 为了解决上述迭代问题, 构建如下确定 ILC 系统

$$\mathbf{B}U_k = \hat{Y}_k. \quad (7)$$

令 $\hat{x}_k = Y - \hat{Y}_k$ 为跟踪误差. 则相应的线性离散系统为

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k + \mathbf{B}u_k. \quad (8)$$

通过不含扰动的确定 ILC 系统(7)来研究不确定 ILC 系统(3). Lyapunov 函数是分析系统渐近稳定的有力工具^[19]. 当系统(8)可镇定时, 通过 Lyapunov 函数设计迭代学习控制律, 从而得到不确定 ILC 系统(3)的学习律.

定理 2 当 $Y \in \text{span}(\mathbf{B})$ 时, 状态反馈控制

$$u_k = -\gamma \mathbf{B}^T \mathbf{F}_1 (\mathbf{F}_1^T \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{F}_1)^{-1} \mathbf{F}_1^T \hat{x}_k$$

确保线性离散系统(8)渐近稳定, 并且迭代学习律

$$U_{k+1} = U_k + \gamma \mathbf{B}^T \mathbf{F}_1 (\mathbf{F}_1^T \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{F}_1)^{-1} \mathbf{F}_1^T \hat{x}_k = (\mathbf{I} - \gamma \mathbf{B}^T \mathbf{F}_1 (\mathbf{F}_1^T \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{F}_1)^{-1} \mathbf{F}_1^T \mathbf{B}) U_k + \gamma \mathbf{B}^T \mathbf{F}_1 (\mathbf{F}_1^T \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{F}_1)^{-1} \mathbf{F}_1^T Y, \quad (9)$$

确保确定 ILC 系统(7)达到跟踪目标 $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{Y}_k = Y$, 输入序列 $\{U_k : k \in \mathbf{Z}_+\}$ 收敛于

$$U = \lim_{k \rightarrow \infty} U_k = [\mathbf{I} - 2\mathbf{K}\mathbf{H}_1 \mathbf{F}_1^T \mathbf{B}] U_0 + 2\mathbf{K}\mathbf{H}_1 \mathbf{F}_1^T Y,$$

其中 U_0 为任意选取的初始向量, $0 < \gamma < 2$ 是一个常数.

证明 不失一般性, 设 $\text{rank}(\mathbf{B}) = r$. 令 $\hat{x}_k = \mathbf{F}\hat{x}_k = [\mathbf{F}_1 \quad \mathbf{F}_2]^T \hat{x}_k$, 根据卡尔曼分解和引理 1, 可得

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{k+1}^C \\ \hat{x}_{k+1}^{NC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_k^C \\ \hat{x}_k^{NC} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1^T \mathbf{B} u_k \\ \mathbf{F}_2^T \mathbf{B} u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_k^C \\ \hat{x}_k^{NC} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1^T \mathbf{B} u_k \\ O \end{bmatrix}.$$

因为 $Y \in \text{span}(\mathbf{B})$, 所以 $\hat{x}_{k+1}^{NC} = \hat{x}_k^{NC} = \mathbf{F}_2^T(Y - \hat{Y}_k) = 0, \forall k \in \mathbf{Z}_+$. 考虑子系统

$$\hat{x}_{k+1}^C = \hat{x}_k^C + \mathbf{F}_1^T \mathbf{B} u_k. \quad (10)$$

取 Lyapunov 函数 $V[\hat{x}_k^C] = (\hat{x}_k^C)^T \hat{x}_k^C$. 则该函数向前一步差分为

$$\Delta V = (\hat{x}_{k+1}^C)^T \hat{x}_{k+1}^C - (\hat{x}_k^C)^T \hat{x}_k^C = (\hat{x}_k^C + \mathbf{F}_1^T \mathbf{B} u_k)^T (\hat{x}_k^C + \mathbf{F}_1^T \mathbf{B} u_k) - (\hat{x}_k^C)^T \hat{x}_k^C =$$

$$(\hat{x}_k^C)^T (\hat{x}_k^C + \mathbf{F}_1^T \mathbf{B} u_k) + u_k^T \mathbf{B}^T \mathbf{F}_1 (\hat{x}_k^C + \mathbf{F}_1^T \mathbf{B} u_k) - (\hat{x}_k^C)^T \hat{x}_k^C.$$

将状态反馈 $u_k = -\gamma \mathbf{B}^T \mathbf{F}_1 (\mathbf{F}_1^T \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{F}_1)^{-1} \hat{x}_k^C$ 代入上式中, 可得 $\Delta V = \gamma(\gamma - 2) \|\hat{x}_k^C\|_3^2$, 当 $0 < \gamma < 2$ 时, 有 $\Delta V < 0$. 根据 Lyapunov 第二方法, 易知子系统(10)是渐近稳定的. 进一步结合 $\hat{x}_k^{NC} = 0$, 可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{x}_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{H} \hat{x}_k = \lim_{k \rightarrow \infty} [\mathbf{H}_1 \hat{x}_k^C \quad \mathbf{H}_2 \hat{x}_k^{NC}] = 0.$$

故系统(8)在 $u_k = -\gamma \mathbf{B}^T \mathbf{F}_1 (\mathbf{F}_1^T \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{F}_1)^{-1} \hat{x}_k^C = -\gamma \mathbf{B}^T \mathbf{F}_1 (\mathbf{F}_1^T \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{F}_1)^{-1} \mathbf{F}_1^T \hat{x}_k$ 下是渐近稳定的. 取 $\mathbf{K} = \gamma \mathbf{B}^T \mathbf{F}_1 (\mathbf{F}_1^T \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{F}_1)^{-1}$. 易知 $\rho(\mathbf{I} - \mathbf{F}_1^T \mathbf{B} \mathbf{K}) = \rho((1 - \gamma)\mathbf{I}) = |1 - \gamma| < 1$. 根据引理2, 确定 ILC 系统(7) 在学习律(9) 下达到跟踪目标 $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{Y}_k = Y$, 且输入序列 $\{U_k : k \in \mathbf{Z}_+\}$ 收敛于 U .

注3 定理2表明, 在学习律(9)下, 输入序列 $\{U_k : k \in \mathbf{Z}_+\}$ 与输出序列 $\{Y_k : k \in \mathbf{Z}_+\}$ 分别收敛于 U, Y . 对确定 ILC 系统(7) 两边取极限, 有 $\mathbf{B}U = Y$. 可见 U 恰为线性方程组(1) 的解.

针对不确定 ILC 系统(3), 采用学习律(9), 考察输出序列 $\{Y_k : k \in \mathbf{Z}_+\}$ 与扰动方程组(2) 的右端向量 Y 之间的误差.

定理3 若 $Y \in \text{span}(\mathbf{B})$, 且 $\|\Delta \mathbf{B}\|_2 < s < 1$, 则对于任意选取的初始向量 U_0 , 不确定 ILC 系统(3) 在学习律(9) 下得到的输出序列 $\{Y_k : k \in \mathbf{Z}_+\}$ 与扰动线性方程组(2) 的右端向量 Y 之间的误差界满足

$$\|Y - Y_\infty\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|Y - Y_k\| \leq s \|\mathbf{B}\|_2 \|U\|_2,$$

其中 U 为线性方程组(1)的解.

证明 取 $u_k = -\mathbf{K} \mathbf{F}_1^T \hat{x}_k = -\gamma \mathbf{B}^T \mathbf{F}_1 (\mathbf{F}_1^T \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{F}_1)^{-1} \mathbf{F}_1^T \hat{x}_k$. 根据定理2, 系统(8) 渐近稳定, 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{x}_k = 0$. 于是, 易知

$$\|Y - Y_k\|_2 = \|Y - \hat{Y}_k + \hat{Y}_k - Y_k\|_2 \leq \|Y - \hat{Y}_k\|_2 + \|\hat{Y}_k - Y_k\|_2 = \|\hat{x}_k\|_2 + \|\mathbf{B} \Delta \mathbf{B} U_k\|_2.$$

当 $k \rightarrow \infty$ 时, 有 $\|Y - Y_\infty\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|Y - Y_k\| \leq s \|\mathbf{B}\|_2 \|U\|_2$.

推论1 若 $Y \in \text{span}(\mathbf{B})$, 且 $\|\Delta \mathbf{B}\|_2$ 足够小时, 则线性方程组(1) 的解 U 为扰动方程组(2) 的近似解.

4 仿真算例

考虑如下扰动线性方程组

$$\mathbf{B}(\mathbf{I} + \Delta \mathbf{B})U = Y,$$

其中 $\Delta \mathbf{B}$ 是未知的扰动矩阵,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, Y = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 0 \quad 2 \quad 3]^T.$$

显然 $\text{rank}(\mathbf{B}) = 3$, 选择系数矩阵 $\mathbf{B}$ 的前3列构成行满秩矩阵

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T,$$

使得 $\text{span}(\mathbf{H}_1) = \text{span}(\mathbf{B})$. 构建不确定 ILC 系统(3), 取 $\mathbf{F}_1 = \mathbf{H}_1 (\mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1)^{-1}$, 根据定理2中(9)式, 取 $\gamma = 1/2$. 利用 MATLAB 计算反馈增益矩阵 $\mathbf{K}$ 并得到学习律

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0.026 \ 8 & 0.038 \ 5 & 0.057 \ 7 & -0.062 \ 5 & 0.053 \ 6 & 0.080 \ 4 \\ 0.008 \ 9 & 0.038 \ 5 & 0.057 \ 7 & 0.062 \ 5 & 0.017 \ 9 & 0.026 \ 8 \\ 0.008 \ 9 & -0.038 \ 5 & -0.057 \ 7 & 0.062 \ 5 & 0.017 \ 9 & 0.026 \ 8 \\ -0.008 \ 9 & -0.038 \ 5 & -0.057 \ 7 & 0.187 \ 5 & -0.017 \ 9 & -0.026 \ 8 \end{bmatrix},$$

$$U_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.625 & -0.125 & -0.125 & 0.125 \\ -0.125 & 0.625 & 0.125 & -0.125 \\ -0.125 & 0.125 & 0.625 & -0.125 \\ 0.125 & -0.125 & -0.125 & 0.625 \end{bmatrix} U_k + \begin{bmatrix} 0.625 \\ 0.375 \\ -0.125 \\ -0.375 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

为了验证所提方法的有效性,在系数矩阵 $\boldsymbol{B}$ 中分别加入服从标准高斯分布和区间 $(0,1)$ 上均匀分布的随机扰动.

例 1 利用 MATLAB 生成由标准高斯分布的随机数组成的矩阵,以其 0.001 的倍数作为扰动矩阵

$$\Delta \boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix} 0.649\ 01 & 0.845\ 56 & -0.196\ 86 & 1.509\ 40 \\ 1.181\ 17 & -0.572\ 66 & 0.586\ 44 & 0.875\ 87 \\ -0.758\ 45 & -0.558\ 68 & -0.851\ 89 & -0.242\ 79 \\ -1.109\ 61 & 0.178\ 38 & 0.800\ 32 & 0.166\ 81 \end{bmatrix} \times 10^{-3},$$

可计算出 $\|\Delta \boldsymbol{B}_1\|_2=0.002\ 4$.选择初始输入向量 $U_0=[1\ 0\ 0\ 1]^T$,在学习律(11)下,输入序列 $\{U_k:k \in \boldsymbol{Z}_+\}$ 各分量的变化曲线及输出序列 $\{Y_k:k \in \boldsymbol{Z}_+\}$ 与扰动线性方程组(2)右端向量 Y 之间的跟踪误差变化的仿真结果如图 1 和图 2 所示.

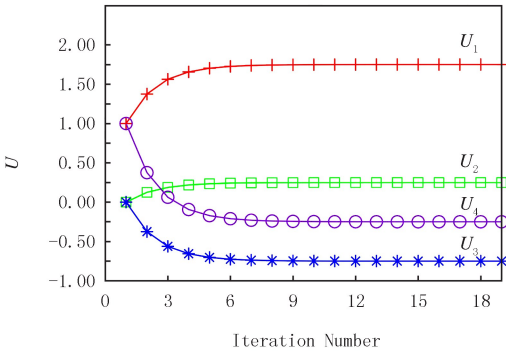


图1 输入 U 随迭代次数的变化曲线

Fig.1 The curve of the input U with Iteration Number

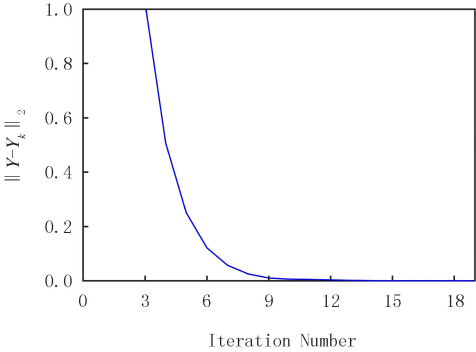


图2 ILC 系统跟踪误差随迭代次数的变化曲线

Fig.2 The curve of the tracking error of ILC system with Iteration Number

图 1 给出了在学习律(11)下输入序列 U_k 的各个分量随迭代次数的变化曲线.从图 1 中可以看出,随着迭代次数的增加,输入序列 $\{U_k:k \in \boldsymbol{Z}_+\}$ 收敛于 $U_1=[1.75\ 0.25\ -0.75\ -0.25]^T$,而 U_1 恰为线性方程组 $\boldsymbol{B}U=Y$ 的解.图 2 给出了不确定 ILC 系统(3)的跟踪误差 $\|Y-Y_k\|_2$ 随迭代次数的变化曲线.从中可以看出,经过多次迭代后,其跟踪误差逐渐减小,且第 15 次的迭代输出为

$$Y_{15}=[0.998\ 4\ 2.000\ 2\ 3.000\ 2\ -0.001\ 4\ 1.996\ 8\ 2.995\ 2]^T.$$

此时不确定 ILC 系统(3)的跟踪误差为 $\|Y-Y_{15}\|_2=0.006\ 1$,小于定理 2 所提的误差界,即 $\|Y-Y_{15}\|_2=0.006\ 1<\|\Delta \boldsymbol{B}_1\|_2\|\boldsymbol{B}\|_2\|U_1\|_2=0.030\ 2$.

例 2 利用 Matlab 生成由区间 $(0,1)$ 上均匀分布的随机数组成的矩阵,以其 0.001 的倍数作为扰动矩阵

$$\Delta \boldsymbol{B}_2 = \begin{bmatrix} 0.435\ 99 & 0.420\ 37 & 0.299\ 65 & 0.134\ 58 \\ 0.025\ 93 & 0.330\ 33 & 0.266\ 82 & 0.513\ 57 \\ 0.549\ 66 & 0.204\ 65 & 0.621\ 13 & 0.184\ 44 \\ 0.435\ 32 & 0.619\ 27 & 0.529\ 14 & 0.785\ 34 \end{bmatrix} \times 10^{-3},$$

可计算出 $\|\Delta \boldsymbol{B}_2\|_2=0.001\ 7$.选择初始输入向量 $U_0=[1\ 0\ 1\ 0]^T$,在学习律(11)下,输入序列 $\{U_k:k \in \boldsymbol{Z}_+\}$ 各分量的变化曲线及输出序列 $\{Y_k:k \in \boldsymbol{Z}_+\}$ 与扰动线性方程组(2)右端向量 Y 之间的跟踪误差变化的仿真结果如图 3 和图 4 所示.

从图 3 中可以看出,随着迭代次数的增加,输入序列 $\{U_k:k \in \boldsymbol{Z}_+\}$ 收敛于 $U_2=[1.25\ 0.75\ -0.25\ -0.75]^T$,而 U_2 也为线性方程组 $\boldsymbol{B}U=Y$ 的一个解.从图 4 中可以看出,经过多次迭代后,其跟踪误差也逐渐减小,并且第 18 次的迭代输出为

$Y_{18}=[0.998\ 4\ \ 2.000\ 2\ \ 3.000\ 2\ \ -0.001\ 4\ \ 1.996\ 8\ \ 2.995\ 2]^T$.
此时不确定 ILC 系统(3)的跟踪误差为 $\|Y-Y_{18}\|_2=0.005\ 3$, 仍然小于定理 2 所提的误差界, 即 $\|Y-Y_{18}\|_2=0.005\ 3<\|\Delta B_2\|_2\|B\|_2\|U_2\|_2=0.017\ 7$.

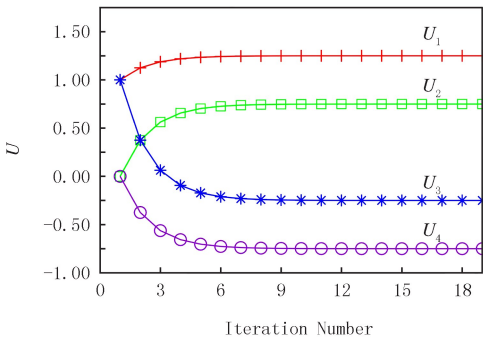


图3 输入U随迭代次数的变化曲线
Fig.3 The curve of the input U with Iteration

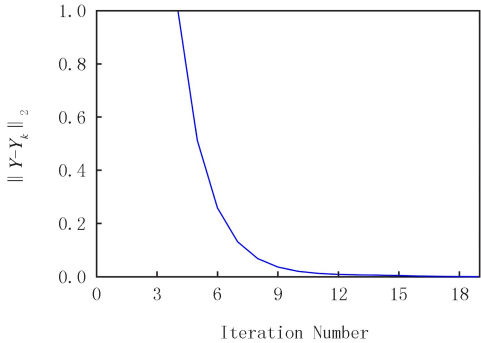


图4 ILC系统跟踪误差随迭代次数的变化曲线
Fig.4 The curve of the tacking error of ILC system with Iteration Number

5 结 论

本文基于迭代学习控制的思想,探讨了一类扰动线性方程组解的存在性判定条件,并给出了其迭代求解算法.利用系数矩阵的列向量与常数项的关系以及扰动矩阵的上界,给出了扰动线性方程组有解的充分条件.设计迭代学习控制律,获得不确定 ILC 系统跟踪误差的上界及扰动线性方程组的近似解.

参 考 文 献

[1] SAAD Y,VAN DER VORST H A.Iterative solution of linear systems in the 20th century[J].Journal of Computational and Applied Mathematics,2000,123(1/2):1-33.
[2] MEHMOOD R,CROWCROFT J.Parallel iterative solution method for large sparse linear equation systems[R].Cambridge:Computer Laboratory University of Cambridge,2005.
[3] AMIN R,SHAH K,ASIF M,et al.An efficient algorithm for numerical solution of fractional integro-differential equations via Haar wavelet[J].Journal of Computational and Applied Mathematics,2021,381:113028.
[4] JIN L,LI S,HU B,et al.A noise-suppressing neural algorithm for solving the time-varying system of linear equations:A control-based approach[J].IEEE Transactions on Industrial Informatics,2018,15(1):236-246.
[5] CARPENTIERI B,DUFF I S,GIRAUD L,et al.Sparse symmetric preconditioners for dense linear systems in electromagnetism[J].Numerical Linear Algebra With Applications,2004,11(8/9):753-771.
[6] 金俐俐.线性方程组的行随机求解算法研究[D].成都:电子科技大学,2022.
JIN L L.Research on the row-stochastic algorithm for solving linear systems[D].Chengdu:University of Electronic Science and Technology of China,2022.
[7] BEAUWENS R.Iterative solution methods[J].Applied Numerical Mathematics,2004,51(4):437-450.
[8] WANG P,MOU S S,LIAN J M,et al.Solving a system of linear equations:From centralized to distributed algorithms[J].Annual Reviews in Control,2019,47:306-322.
[9] 陈小山.矩阵扰动若干问题研究[D].广州:华南师范大学,2002.
CHEN X S.A study for some matrix perturbation problems[D].Guangzhou:South China Normal University,2002.
[10] 姚合军,李钧涛.一类非线性随机网络系统的均方指数稳定控制[J].河南师范大学学报(自然科学版),2019,47(6):31-37.
YAO H J,LI J T.Exponential stability control for a class of nonlinear stochastic networked control systems[J].Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition),2019,47(6):31-37.
[11] 白玉琴.线性方程组的迭代解法及预处理技术研究[D].成都:电子科技大学,2016.
BAI Y Q.Research on splitting iterative methods and preconditioning techniques for linear system of equations[D].Chengdu:University of Electronic Science and Technology of China,2016.
[12] 巫文婷.求解带扰动的线性方程组的贪婪随机 Kaczmarz 方法[J].同济大学学报(自然科学版),2021,49(10):1466-1472.
WU W T.Greedy randomized kaczmarz method for solving noisy linear systems[J].Journal of Tongji University(Natural Science),2021,

49(10):1466-1472.

[13] ZOUZIAS A,FRERIS N M.Randomized extended kaczmarz for solving least-squares[J].SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications,2013,34(2):773-793.

[14] BHAYA A,KASZKUREWICZ E.Iterative methods as dynamical systems with feedback control[C]//42nd IEEE International Conference on Decision and Control.Piscataway:IEEE Press,2003:2374-2380.

[15] BHAYA A,KASZKUREWICZ E.A control-theoretic approach to the design of zero finding numerical methods[J].IEEE Transactions on Automatic Control,2007,52:1014-1026.

[16] HELMKE U,JORDAN J.Optimal control of iterative solution methods for linear systems of equations[C]//Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics.Berlin:WILEY-VCH Verlag,2005,5(1):163-164.

[17] MENG D Y,WU Y X.Control design for iterative methods in solving linear algebraic equations[J].IEEE Transactions on Automatic Control,2021.DOI:10.1109/TAC.2021.3115455.

[18] GOLUB G H,LOAN C F.Matrix computations[M].3rd ed. Baltimore:The Johns Hopkins University Press,1996.

[19] 熊建栋,任志敏.切换线性系统在一类切换策略下的鲁棒稳定性分析[J].河南师范大学学报(自然科学版),2018,46(1):29-36.

XIONG J D,REN Z M.Robust stability analysis of a class of switched linear systems under a switching strategy[J].Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition),2018,46(1):29-36.

Iterative learning control method for solving a class of perturbed linear algebraic equations

Li Juntao¹, Liang Cong¹, Tang Yong²

(1. College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China;
2. Xinxiang Aviation Industry(Group)Co., Ltd, Xinxiang 453003, China)

Abstract: A solving method based on iterative learning control was proposed for a class of linear algebraic equations with perturbations in the coefficient matrix. Firstly, the solving of linear algebraic equations with perturbations was transformed to study the stabilizability of a linear discrete uncertain system; then, a sufficient condition for the solvability of the perturbed linear algebraic equations was given. After that, the state feedback controller was designed by the Lyapunov function to obtain the learning law of the deterministic iterative learning control system, based on which the upper bound of the tracking error of the uncertain system and the approximate solution of the perturbed linear algebraic equations were obtained. Finally, the simulation experiments verified the effectiveness of the proposed method.

Keywords: perturbed linear algebraic equations; iterative learning; state feedback

[责任编辑 陈留院 赵晓华]

本期专家介绍



孟德元,北京航空航天大学教授,博士生导师,国家自然科学基金优秀青年科学基金获得者.主要研究兴趣包括网络系统控制、迭代学习控制及数据驱动控制等控制方法的理论与应用,并(在线)发表相关学术论文 140 余篇,授权相关国家发明专利 10 余件等.目前,担任中国自动化学会数据驱动控制、学习与优化专业委员会委员、副秘书长,中国自动化学会控制理论专业委员会委员,以及中国指挥与控制学会集群智能与协同控制专业委员会委员等;担任期刊《空天技术》编委会委员,以及 *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 客座编辑;担任美国数学评论的评论员(*Mathematical Reviews, Reviewer*)等.此外,曾担任中国人工智能学会智能空天系统专业委员会委员、副秘书长,中国人工智能学会智能服务专业委员会委员, *IEEE Data Driven Control and Learning Systems Conference (DDCLS)*, *Editorial Chair, Chinese Control Conference (CCC)*, *Program Committee Member*, 以及 *Chinese Intelligent Systems Conference, General Secretary* 等.

李钧涛,河南师范大学教授,2010 年 1 月博士毕业于北京航空航天大学控制理论与控制工程专业,长期从事复杂系统建模与控制、统计机器学习、生物信息挖掘等方面研究.近年来主持、参与国家自然科学基金 6 项,主持、参与河南省高校科技创新人才计划、河南省重点科技攻关计划等省部级重大、重点项目 10 余项;完成河南省科技成果鉴定 1 项;发表学术论文 40 篇(其中 SCI, EI 检索论文 30 余篇),获得授权发明专利 1 件.现为国家自然科学基金信息科学部通讯评议专家,中国自动化学会数据驱动控制、学习与优化专业委员会委员,中国人工智能学会智能空天系统专业委员会委员,广东、江西等多省科技厅项目评审专家.先后获得“河南省高校科技创新人才”“河南省高校青年骨干教师”“河南省优秀硕士学位论文指导教师”等荣誉称号.



茹振钢,河南科技学院二级教授,河南大学兼职博士生导师,主要从事小麦新品种选育及相关应用基础研究.曾任河南省小麦抗病虫育种首席专家,现任河南省小麦研究会副理事长、河南省品种审定委员会委员、河南省杂交小麦重点实验室主任、全国高校黄大年式教师团队负责人.曾入选全国优秀共产党员、中原学者、河南省优秀专家、全国杰出专业技术人才、国务院特殊津贴专家,全国先进工作者、全国模范教师、全国粮食生产突出贡献农业科技人员.主持和承担国家“973”计划、国家支撑计划、“十三五”国家重点基础研究专项、河南省重大科技专项和横向委托项目等课题 20 多项.培育并推广了百农 62、百农 64、百农 160、矮抗 58、百农 418、百农 4199、百农 1316 等一系列小麦新品种,累计推广面积约 2.7×10^7 公顷.作为主持人获得国家科技进步一等奖、何梁何利科学技术进步奖、庄巧生小麦研究贡献奖、全国创新争先奖、河南省科学技术杰出贡献奖等.