

求解特定鞍点问题加速的 MSOR-Like 方法

张理涛^a, 朱光旭^b

(郑州航空工业管理学院 a. 数学学院; b. 航空宇航学院, 郑州 450046)

摘要: 针对鞍点问题求解中传统方法收敛速度慢、计算复杂度高的问题, 在改进逐次超松弛方法的基础上引入加速因子, 提出一种加速 MSOR-Like 方法. 该方法通过优化矩阵分裂与参数控制提升迭代效率与稳定性, 并给出收敛性条件. 数值实验表明, 该方法在迭代步数与计算时间上均优于最优参数的 MSOR-Like 方法.

关键词: 鞍点问题; 收敛性; SOR 迭代法; 矩阵分裂

中图分类号: O242

文献标志码: A

文章编号: 1000-2367(2026)03-0060-08

鞍点问题广泛应用于科学计算与工程技术领域, 尤其是在处理大型稀疏线性方程组时显得尤为关键, 鞍点问题中存在着众多复杂问题, 如带权最小二乘、约束优化、计算流体动力学、线性与非线性规划, 以及椭圆型偏微分方程等^[1-4]通过数值线性代数的方法, 如离散化、有限元法和有限差分法等, 都可以将这些复杂问题转化为求解大型稀疏线性方程组的问题.

鞍点问题之所以特殊, 是因为其系数矩阵通常呈现出一种独特的稀疏模式, 这种稀疏结构特征使得传统的直接求解方法(直接法、高斯消元法)在处理大规模矩阵问题时变得效率低下. 为了解决这一难题, 国内外学者提出了一系列新的迭代方法, 其中定常迭代方法主要包括 SOR 类方法、HSS(hermitian and skew-hermitian splitting)类迭代以及 Uzawa 类方法, 关于 SOR 类迭代方法, GOLUB 等^[5]率先提出了一种 SOR-like 迭代法, 深入研究了其收敛性和最优参数, 并指出了发散区域. 为了进一步提升收敛速度, BAI 等^[6]在此基础上提出广义的逐次超松弛(generalized successive over-relaxation, GSOR)迭代方法, 通过引入另外的参数来进一步加速求解鞍点问题. 随后, NJERU 等^[7]通过引入两个参数来加速迭代, 从而提出了加速的 AOR(accelerated over-relaxation)迭代方法. 众多学者对 SOR 类方法进行了多方面的改进, 详情可参阅文献[8-11]. 在 HSS 类迭代方法中, BAI 等^[12]提出了预处理的 HSS 迭代算法和加速的 HSS 迭代算法^[13], 并验证了 HSS 迭代法具备无条件收敛特性. 随后, LI 等^[14]在此基础上通过交换两个参数的位置, 提出了参数化的 preconditioned Hermitian and Skew-Hermitian splitting(PHSS)迭代法, 近年来, 针对 HSS 迭代法, 众多学者继续深入探索与优化, 具体可参阅文献[15-17]. 在 Uzawa 类方法中, ELMAN 等^[18]提出了参数不精确的 Uzawa 方法, 以及 ZHENG 等^[19]提出的参数化 Uzawa 方法. 至于非定常迭代方法, 其主要依赖于 Krylov 子空间方法.

现有的 SOR-Like 及其扩展方法(如 GSOR 和 HSS)在求解稀疏鞍点问题方面具有算法简单、计算代价低的优点, 但在参数选取和迭代收敛性方面依赖于问题的具体条件, 限制了其适用范围和求解效率. 为解决其

收稿日期: 2024-12-18; **修回日期:** 2025-02-20.

基金项目: 国家自然科学基金(11501525); 郑州航院科技创新团队(23ZHTD01003); 河南省高等学校重点科研项目计划基础研究专项(25ZX013); 河南省校企协同创新项目(26AXQXT110).

作者简介(通信作者): 张理涛(1980-), 男, 河南周口人, 郑州航空工业管理学院教授, 博士, 主要从事数值代数与科学计算及应用研究, E-mail: litaozhang@163.com.

引用本文: 张理涛, 朱光旭. 求解特定鞍点问题加速的 MSOR-Like 方法[J]. 河南师范大学学报(自然科学版), 2026, 54(3): 60-67. (Zhang Litao, Zhu Guangxu. An accelerated MSOR-Like method for solving specific saddle point problems[J]. Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition), 2026, 54(3): 60-67. DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2024.12.18.0002.)

带来的限制,MSOR-Like 方法通过对 Hermitian 和反 Hermitian 分裂的优化,在理论上拓宽了松弛参数的适用区间,更适配于稀疏矩阵的结构特性,但在收敛速度的进一步提升方面仍存在局限性.本文在 MSOR-Like 文的基础上,提出了求解鞍点问题的 AMSOR-Like 迭代算法,首先分析相应的迭代格式和迭代算法,进而通过理论分析证明 AMSOR-Like 迭代算法的收敛性及参数收敛范围,最后通过数值实验证明 AMSOR-Like 迭代法相比 MSOR-Like 具有更好的效率.

1 AMSOR-Like 迭代法

1.1 MSOR-Like 迭代法

鞍点问题的一般形式为:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{B}^T & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ -\mathbf{g} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

其中, $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times m}$ 为非对称正定矩阵, $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ ($m \geq n$) 为列满秩矩阵, \mathbf{B}^T 为 \mathbf{B} 的转置矩阵, $\mathbf{x}, \mathbf{f} \in \mathbf{R}^m$, 且 $\mathbf{y}, \mathbf{g} \in \mathbf{R}^n$ 是已知向量. 在文献[21]中针对鞍点问题(1)的系数矩阵进行了以下分裂,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{B}^T & \mathbf{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\mathbf{S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{pmatrix} = \mathbf{D}_M - \mathbf{L}_M - \mathbf{U}_M, \quad (2)$$

式(2)中,基于 HSS 分裂迭代法,矩阵 $\mathbf{A} = \mathbf{H} + \mathbf{S}$, $\mathbf{H} = 1/2(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$, \mathbf{H} 是正定的 Hermitian 矩阵, $\mathbf{S} = 1/2(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$, \mathbf{S} 是反 Hermitian 矩阵, $\mathbf{Q} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为对称正定矩阵,引入松弛参数 $\omega > 0$ 进行迭代,其迭代格式为:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}^{(K+1)} \\ \mathbf{Y}^{(K+1)} \end{pmatrix} = (\mathbf{D}_M - \omega \mathbf{L}_M)^{-1} [(1 - \omega) \mathbf{D}_M + \omega \mathbf{U}_M] \begin{pmatrix} \mathbf{X}^{(K)} \\ \mathbf{Y}^{(K)} \end{pmatrix} + \omega (\mathbf{D}_M - \omega \mathbf{L}_M)^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ -\mathbf{g} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

MSOR-Like 迭代法是一种改进的逐次超松弛方法,通过对鞍点问题的系数矩阵进行 Hermitian 和反 Hermitian 分裂,以构造迭代格式,其核心思想是利用矩阵分裂降低计算复杂度并且引入松弛参数调整迭代步长,从而优化收敛速度.

1.2 AMSOR-Like 迭代法

在 MSOR-Like 的基础上,为进一步提高迭代速度,根据上述的分裂形式,引入加速因子 γ ,可得到 AMSOR-Like 的迭代格式,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}^{(K+1)} \\ \mathbf{Y}^{(K+1)} \end{pmatrix} = \mathbf{G} \begin{pmatrix} \mathbf{X}^{(K)} \\ \mathbf{Y}^{(K)} \end{pmatrix} + \mathbf{T} \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ -\mathbf{g} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

其中, $\mathbf{G} = (\mathbf{D}_M - \gamma \mathbf{L}_M)^{-1} [(1 - \omega) \mathbf{D}_M + (\omega + \gamma) \mathbf{L}_M + \omega \mathbf{U}_M]$, $\mathbf{T} = \omega (\mathbf{D}_M - \gamma \mathbf{L}_M)^{-1}$, 通过简单的计算得,

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} (\mathbf{H} + \gamma \mathbf{S}) & \mathbf{0} \\ -\gamma \mathbf{B}^T & \mathbf{Q} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (1 - \omega) \mathbf{H} - (\omega - \gamma) \mathbf{S} & -\omega \mathbf{B} \\ (\omega - \gamma) \mathbf{B}^T & \mathbf{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{H} + \gamma \mathbf{S})^{-1} [(1 - \omega) \mathbf{H} - (\omega - \gamma) \mathbf{S}] + (\omega - \gamma) \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{B}^T & -\omega (\mathbf{H} + \gamma \mathbf{S})^{-1} \mathbf{B} \\ \gamma \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{B}^T (\mathbf{H} + \gamma \mathbf{S})^{-1} [(1 - \omega) \mathbf{H} - (\omega - \gamma) \mathbf{S}] + (\omega - \gamma) \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{B}^T & \mathbf{I} - \omega \mathbf{Q}^{-1} \gamma \mathbf{B}^T (\mathbf{H} + \gamma \mathbf{S})^{-1} \mathbf{B} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \omega (\mathbf{H} + \gamma \mathbf{S})^{-1} & \mathbf{0} \\ \omega \gamma \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{B}^T (\mathbf{H} + \gamma \mathbf{S})^{-1} & \omega \mathbf{Q}^{-1} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

计算整理可得如下迭代算法:

$$\begin{cases} \mathbf{X}^{(K+1)} = (\mathbf{H} + \gamma \mathbf{S})^{-1} [(1 - \omega) \mathbf{H} - (\omega - \gamma) \mathbf{S}] \mathbf{X}^{(K)} + \omega (\mathbf{H} + \gamma \mathbf{S})^{-1} (\mathbf{f} - \mathbf{B} \mathbf{Y}^{(K)}), \\ \mathbf{Y}^{(K+1)} = \mathbf{Y}^{(K)} + \omega \mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{B}^T \mathbf{X}^{(K+1)} - \mathbf{g}), \end{cases} \quad (7)$$

其中, γ 的选择进一步加速了迭代速度,同时改善了迭代矩阵的特征值分布.相较于 MSOR-Like 方法,AMSOR-Like 方法不仅在收敛条件下减少了迭代步数,同时对初值选择的敏感性降低.

注记 1 当 $\omega = \gamma$ 时, AMSOR-Like 迭代法就变成了 MSOR-Like 迭代法^[21], 当 $\mathbf{H} = \mathbf{A}$, $\mathbf{S} = \mathbf{0}$, $\omega = \gamma$ 时就变成了 SOR-Like 迭代法^[5].

2 收敛性分析

本节中,在验证 AMSOR-Like 迭代法的收敛性时,用 $\rho(G)$ 来表示迭代矩阵 G 的谱半径.根据数值分析理论可知,AMSOR-Like 迭代法在当 $\rho(G) < 1$ 时是收敛的,下面给出几个相关的引理:

引理 1 设 λ 是迭代矩阵 G 的特征值,则 $\lambda \neq 1$.

证明 将迭代矩阵 G 改写成以下形式,其中 $(\mathbf{u}^T, \mathbf{v}^T)^T$ 为 λ 对应的特征向量.

$$\begin{pmatrix} (1-\omega)\mathbf{H} - (\omega-\gamma)\mathbf{S} & -\omega\mathbf{B} \\ (\omega-\gamma)\mathbf{B}^T & \mathbf{Q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} (\mathbf{H} + \gamma\mathbf{S}) & 0 \\ -\gamma\mathbf{B}^T & \mathbf{Q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

通过计算可以得到

$$\begin{cases} [(1-\lambda)(\mathbf{H} + \gamma\mathbf{S}) - \omega\mathbf{H} - \omega\mathbf{S}]\mathbf{u} - \omega\mathbf{B}\mathbf{v} = 0, \\ (1-\lambda)(\gamma\mathbf{B}^T\mathbf{u} - \mathbf{Q}\mathbf{v}) - \omega\mathbf{B}^T\mathbf{u} = 0, \end{cases} \quad (9)$$

式(9)中,当 $\lambda=1$ 和 $\omega>0$ 时,可以导出

$$\begin{pmatrix} \omega\mathbf{A} & \omega\mathbf{B} \\ -\omega\mathbf{B}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{B}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

已知式(1)中 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times m}$ 为非对称正定矩阵, $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ ($m \geq n$) 为列满秩矩阵,从而式中的系数矩阵是非奇异,则 $\mathbf{u}=0, \mathbf{v}=0$ 与 $(\mathbf{u}^T, \mathbf{v}^T)^T$ 为 λ 对应的特征向量相矛盾,所以 $\lambda \neq 1$, 证毕.

引理 2 设 λ 为迭代矩阵 G 的任意一个特征值,松弛参数 ω 在 $(0, 2)$, $(\mathbf{u}^T, \mathbf{v}^T)^T$ 为 λ 对应的特征向量,必有 $\mathbf{u} \neq 0, \mathbf{v}=0$, 则 $|\lambda| < 1$.

证明 若 $\mathbf{u}=0$ 带入式(9)中第 1 个等式,因 $\omega > 0, \mathbf{B} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ ($m \geq n$) 为列满秩矩阵,则 $\mathbf{v}=0$ 与 $(\mathbf{u}^T, \mathbf{v}^T)^T$ 为 λ 对应的特征向量相矛盾.若 $\mathbf{u} \neq 0, \mathbf{v}=0$ 改写式(9)的形式得

$$\begin{cases} [(1-\lambda-\omega)\mathbf{H} + (\gamma-\lambda\gamma-\omega)\mathbf{S}]\mathbf{u} - \omega\mathbf{B}\mathbf{v} = 0, \\ \mathbf{v} = [\gamma\mathbf{B}^T\mathbf{u} - \frac{\omega\mathbf{B}^T\mathbf{u}}{1-\lambda}]\mathbf{Q}^{-1}. \end{cases} \quad (11)$$

根据 Rayleigh 商的定义,令 $a = \mathbf{R}_H(\mathbf{u}) = \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{H} \mathbf{u}}{\mathbf{u}^T \mathbf{u}}, b = \mathbf{R}_S(\mathbf{u}) = \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{S} \mathbf{u}}{\mathbf{u}^T \mathbf{u}}, c = \mathbf{R}_C(\mathbf{u}) = \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u}}{\mathbf{u}^T \mathbf{u}}$.

用 $\mathbf{u}^T / \mathbf{u}^T \mathbf{u}$ 左乘式(11)的第 1 个等式可得

$$(1-\lambda-\omega)a + (\gamma-\lambda\gamma-\omega)b = 0, \quad (12)$$

\mathbf{H} 是正定的 Hermitian 矩阵,则 $a > 0, \mathbf{H}$ 是反 Hermitian 矩阵,则 $b=0$, 则 $\lambda=1-\omega, 0 < \omega < 2$, 所以, $-1 < \lambda < 1$ 则 $|\lambda| < 1$.

引理 3^[22] 一元二次方程 $\lambda^2 - b\lambda + c = 0$, 其中 b 和 c 都是实数,两根之模均小于 1, 当且仅当 $|c| < 1$ 及 $|b| < c+1$.

定理 1 假设参数 ω 在 $(0, 2)$ 之间, AMSOR-Like 迭代方法收敛当且仅当满足.

$$\omega - \gamma < \frac{a_{\min}}{c_{\max}} \text{ 和 } 2\gamma - \omega < \frac{2(2-\omega)a_{\min}}{\omega c_{\max}}. \quad (13)$$

证明 将式(11)中的第 2 个等式代入第 1 个等式,并在等式左边乘 $\mathbf{u}^T / \mathbf{u}^T \mathbf{u}$ 得

$$(1-\lambda-\omega)a + (\gamma-\lambda\gamma-\omega)b - \omega[\gamma c - \frac{\omega c}{1-\lambda}] = 0, \quad (14)$$

a, b, c 分别为矩阵 $\mathbf{H}, \mathbf{S}, \mathbf{BQ}^{-1}\mathbf{B}^T$ 的 Rayleigh 商, 由于矩阵 \mathbf{H} 正定, \mathbf{S} 反对称, $\mathbf{BQ}^{-1}\mathbf{B}^T$ 半正定.

已知 $a > 0, b=0, c > 0$, 将式(14)化简

$$\lambda^2 + (\omega - 2 + \frac{c}{a}\omega\gamma)\lambda + (1 - \omega + \frac{c}{a}\omega(\omega - \gamma)) = 0. \quad (15)$$

由引理 3 可知

$$\begin{cases} |1 - \omega + \frac{c}{a}\omega(\omega - \gamma)| < 1, \\ |\omega - 2 + \frac{c}{a}\omega\gamma| < 2 - \omega + \frac{c}{a}\omega(\omega - \gamma), \end{cases} \quad (16)$$

等价于

$$\begin{cases} \omega - \frac{\omega(\omega - \gamma)c}{a} > 0, \\ 2 - \omega + \frac{\omega(\omega - \gamma)c}{a} > 0, \\ 2(2 - \omega) + \frac{\omega(\omega - 2\gamma)c}{a} > 0, \end{cases} \quad (17)$$

因此有

$$\begin{cases} \omega - \gamma < \frac{a}{c}, \\ 2\gamma - \omega < \frac{2(2 - \omega)a}{\omega c}. \end{cases} \quad (18)$$

由于 $\frac{a}{c} \geq \frac{a_{\min}}{c_{\max}}$ 和 $\frac{2(2 - \omega)a}{\omega c} \geq \frac{2(2 - \omega)a_{\min}}{\omega c_{\max}}$, 得 AMSOR-Like 方法收敛, 当且仅当式(13)成立.

注记 2 c_{\max} 表示 $\mathbf{B}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{B}$ 的最大特征值, a_{\min} 表示 \mathbf{H} 的最小特征值, 当 $\omega = \gamma$ 时, 可得 ω 的取值范围与文献[21]的一致.

3 数值实验

3.1 实验设置与算法性能对比分析

在本节中, 对 AMSOR-Like 迭代方法与 MSOR-Like 迭代方法进行了数值实验, 并将两个迭代方法的结果进行对比, 考虑如下的 Stokes 问题^[12]:

$$\begin{cases} -v\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \text{ 在 } \Omega \text{ 内;} \\ \nabla \mathbf{u} = \mathbf{g}, \text{ 在 } \Omega \text{ 内;} \\ \mathbf{u} = 0, \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上;} \\ \int_{\Omega} p(x) dx = 0. \end{cases} \quad (19)$$

其中, $\Omega = (0, 1) \times (0, 1) \in \mathbf{R}^2$ 是矩形区域, $\partial\Omega$ 为 Ω 的边界, 黏滞系数用 v 表示, Laplace 算子表示为 Δ , 向量函数 \mathbf{u} 为 Ω 上的速度, 标量函数 p 则表示为压力, 利用如下的迎风格式对式(19)进行离散, 可得线性系统,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{B}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ -\mathbf{g} \end{pmatrix}, \mathbf{f} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \phi d\Omega, \mathbf{g} = \int_{\Omega} \mathbf{g} q d\Omega \text{ 其中}$$

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \otimes \mathbf{T} + \mathbf{T} \otimes \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \otimes \mathbf{T} + \mathbf{T} \otimes \mathbf{I} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2p^2 \times 2p^2}, \\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \otimes \mathbf{F} \\ \mathbf{F} \otimes \mathbf{I} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2p^2 \times p^2}, \\ \mathbf{T} = \frac{v}{h^2} \text{tridiag}(-1.5, 2, -0.5) \in \mathbf{R}^{p \times p}, \\ \mathbf{F} = \frac{1}{h} \text{tridiag}(-1, 1, 0) \in \mathbf{R}^{p \times p}. \end{cases} \quad (20)$$

这里, \otimes 表示矩阵的 Kronecker 积, tridiag 代表 1 个三角矩阵, $h = 1/p + 1$ 为离散化网格步长, $m = 2p^2$, $n = p^2$, 表示为矩阵的规模参数, 黏滞系数 $v = 1$.

在本实验中, 选取初始向量为 $((\mathbf{x}^*)^T, (\mathbf{y}^*)^T)^T = (0, 0, \dots, 0)^T$, 同时选取右端向量 $(\mathbf{f}^T, \mathbf{g}^T)^T \in \mathbf{R}^{m+n}$

使得式(1)的精确解为 $((\mathbf{x}^*)^T, (\mathbf{y}^*)^T)^T = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbf{R}^{m+n}$ [23]. 在迭代过程中, IT 表示迭代步数, CPU 表示达到收敛要求所消耗的计算时间, e_{ERR} 用于衡量实验的误差大小, 使用 MATLAB 编程语言, $\text{ERR} < 10^{-6}$ 时停止计算, e_{ERR} 定义如下:

$$e_{\text{ERR}} = \frac{\sqrt{\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\|_2^2 + \|\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{y}^*\|_2^2}}{\sqrt{\|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}^*\|_2^2 + \|\mathbf{y}^{(0)} - \mathbf{y}^*\|_2^2}}. \quad (21)$$

选取合适的正定矩阵 \mathbf{Q} 如表 1 所示.

表 1 选择正定矩阵 \mathbf{Q}

Tab. 1 Select the positive definite matrix \mathbf{Q}

Case no.	Matrix \mathbf{Q}	Description
I	$\mathbf{B}^T \hat{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{B}$	$\hat{\mathbf{A}} = \text{diag}(\mathbf{H})$
II	$\mathbf{B}^T \hat{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{B}$	$\hat{\mathbf{A}} = \text{tridiag}(\mathbf{H})$

选取 Case I 和 Case II 为正定矩阵 \mathbf{Q} , 进行实验计算, 得到的 IT、CPU 和 ERR 如表 2 所示, 误差下降速度如图 1 至图 2 所示.

表 2 AMSOR-Like 方法与最优参数的 MSOR-Like 方法的 IT, CPU 和 ERR 比较

Tab. 2 Comparison of IT, CPU, and ERR between the AMSOR-Like method and the MSOR-Like method with optimal parameters

			m	n	$m+n$			
			128	512	1 152	2 048		
			64	256	576	1 024		
			192	768	1 728	3 072		
Case I	AMSOR-Like	ω	1.00	0.99	0.95	0.90		
		γ	0.85	0.86	0.75	0.66		
		IT	23	26	26	28		
		CPU	0.021 3	0.461 1	4.149 7	26.281 2		
		e_{ERR}	9.077 5e-07	9.187 3e-07	8.714 3e-07	7.500 1e-07		
	MSOR-Like	ω	1.00	0.99	0.95	0.90		
		IT	27	34	39	41		
		CPU	0.033 6	0.565 4	6.058 8	37.039 5		
		e_{ERR}	9.706 1e-07	9.596 4e-07	9.100 9e-07	8.201 8e-07		
		Case II	AMSOR-Like	ω	1.01	0.98	0.97	0.96
γ	0.90			0.75	0.75	0.75		
IT	23			25	26	26		
CPU	0.020 9			0.404 6	3.499 2	24.753 8		
e_{ERR}	9.856 4e-07			9.616 1e-07	7.206e-07	8.083 1e-07		
MSOR-Like	ω		1.01	0.98	0.97	0.96		
	IT		26	27	27	29		
	CPU		0.022 7	0.450 1	3.989 1	29.868 1		
	e_{ERR}		7.690 6e-07	9.550 2e-07	9.361 9e-07	7.903 8e-07		

在表 2 中, 得到了不同的矩阵规模下的 IT、CPU 和 e_{ERR} 的数值结果, 可以看出在选取合适的对称正定矩阵 \mathbf{Q} 时, AMSOR-Like 方法比最优参数的 MSOR-Like 方法具有更少的迭代步数和更快的收敛速度. 在图 1 至图 2 中, 对比 2 种方法的误差随迭代步数增加的变化趋势, 可以直观地看出 AMSOR-Like 方法比最优参数的 MSOR-Like 方法更快地达到实验精度.

在图 3 和图 4 中, 可以看出 AMSOR-Like 的迭代矩阵特征值分布相比选取最优参数的 MSOR-Like 迭代矩阵特征值分布更加聚集, 实际求解时收敛效果会更好.

注记 3 AMSOR-Like 方法的参数并不是最优的, 只是在收敛域范围内.

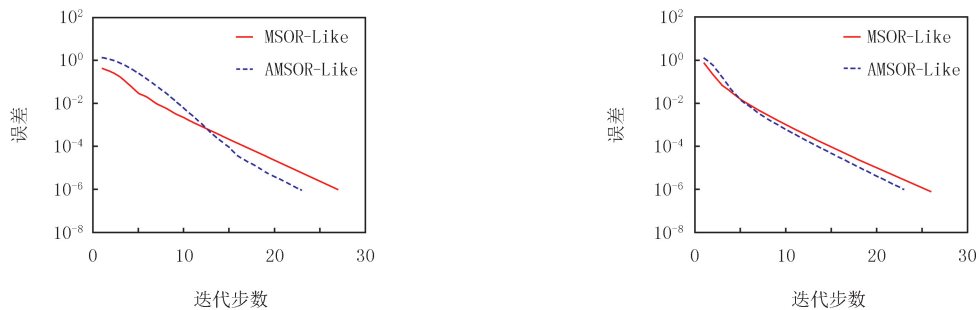


图1 $m+n=192$, Case I 和Case II 的误差下降速度比较

Fig.1 $m+n=192$, the error reduction rate of Case I and Case II is compared

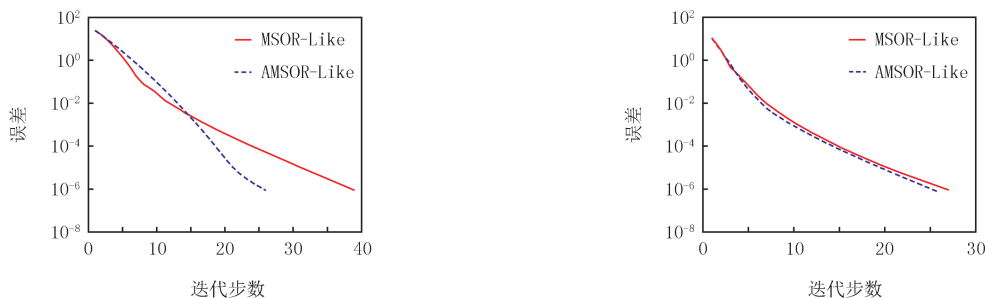


图2 $m+n=1728$, Case I 和Case II 的误差下降速度比较

Fig.2 $m+n=1728$, the error reduction rate of Case I and Case II is compared

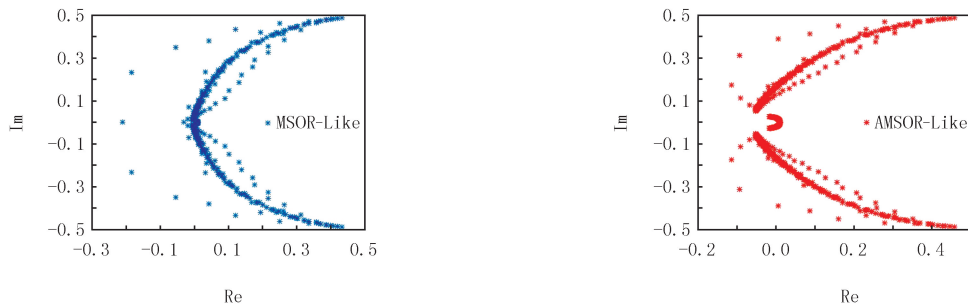


图3 Case I, $m+n=768$ 时MSOR-Like ($\omega=0.99$)和AMSOR-Like ($\omega=0.99, \gamma=0.95$)迭代矩阵特征值分布

Fig.3 MSOR-Like ($\omega=0.99$) and AMSOR-Like ($\omega=0.99, \gamma=0.95$) iterative matrix eigenvalue distribution at Case I and $m+n=768$

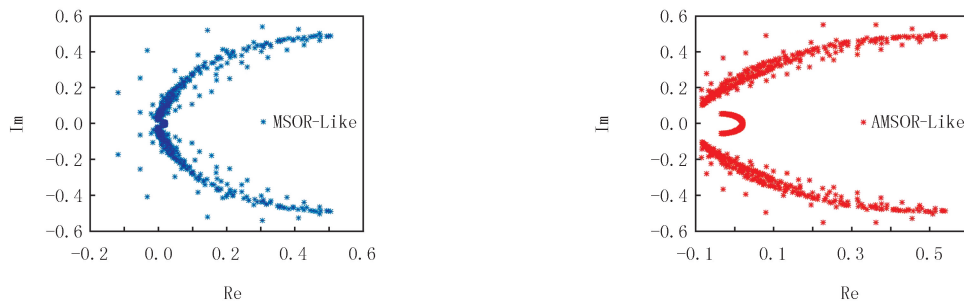


图4 Case II, $m+n=768$ 时MSOR-Like ($\omega=0.98$)和AMSOR-Like ($\omega=0.98, \gamma=0.90$)迭代矩阵特征值分布

Fig.4 MSOR-Like ($\omega=0.98$) and AMSOR-Like ($\omega=0.98, \gamma=0.90$) iterative matrix eigenvalue distribution at Case II and $m+n=768$

4 结 论

本文在 MSOR-Like 方法的基础上,通过引入了一个加速因子,从而提出了 AMSOR-Like 方法.推导了该方法的收敛条件,借助一系列的数值实验,验证了当选取恰当的加速因子时,AMSOR-Like 方法相较于最优参数的 MSOR-Like 方法展现出更快的收敛速度,证实了在解决大型稀疏矩阵的鞍点问题方面,AMSOR-Like 方法展现出了更好的收敛效率.

参 考 文 献

- [1] BAI Y Q. A class of modified GSS preconditioners for complex symmetric linear systems[J]. *International Journal of Computer Mathematics*, 2021, 98(9): 1713-1726.
- [2] PHAM T H. Approximate optimal solutions for multiobjective optimization problems with infinite constraints[J]. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 2024, 47(3): 70.
- [3] WANG H L, WU D, YU C J, et al. A duality-based approach for linear parabolic optimal control problems[J]. *Optimal Control Applications and Methods*, 2024, 45(3): 1140-1165.
- [4] WEI J C, MA C F. A modified RBULT preconditioner for generalized saddle point problems from the hydrodynamic equations[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2024, 478(C): 128826.
- [5] GOLUB G H, WU X, YUAN J Y. SOR-like methods for augmented systems[J]. *BIT Numerical Mathematics*, 2001, 41(1): 71-85.
- [6] BAI Z Z, PARLETT B N, WANG Z Q. On generalized successive overrelaxation methods for augmented linear systems[J]. *Numerische Mathematik*, 2005, 102(1): 1-38.
- [7] NJERU P N, GUO X P. Accelerated SOR-like method for augmented linear systems[J]. *BIT Numerical Mathematics*, 2016, 56(2): 557-571.
- [8] GUO X P, HADJIDIMOS A. Optimal accelerated SOR-like(ASOR) method for singular symmetric saddle point problems[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2020, 370: 112662.
- [9] ZHANG G F, LU Q H. On generalized symmetric SOR method for augmented systems[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2008, 219(1): 51-58.
- [10] ZHENG Q Q, MA C F. A new SOR-Like method for the saddle point problems[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2014, 233: 421-429.
- [11] GUO P, WU S L, LI C X. On the SOR-like iteration method for solving absolute value equations[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2019, 97: 107-113.
- [12] BAI Z Z, GOLUB G H, PAN J Y. Preconditioned Hermitian and skew-Hermitian splitting methods for non-Hermitian positive semidefinite linear systems[J]. *Numerische Mathematik*, 2004, 98(1): 1-32.
- [13] BAI Z Z, GOLUB G H. Accelerated Hermitian and skew-Hermitian splitting iteration methods for saddle-point problems[J]. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 2007, 27(1): 1-23.
- [14] LI X, YANG A L, WU Y J. Parameterized preconditioned Hermitian and skew-Hermitian splitting iteration method for saddle-point problems[J]. *International Journal of Computer Mathematics*, 2014, 91(6): 1224-1238.
- [15] 董贝贝, 鲍亮. 求解鞍点问题的广义正定和反 Hermitian 分裂方法[J]. *计算机工程与科学*, 2019, 41(9): 1567-1573.
DONG B B, BAO L. A generalized positive-definite and skew-Hermitian splitting iteration method for saddle point problems[J]. *Computer Engineering and Science*, 2019, 41(9): 1567-1573.
- [16] WU Y J, LI X, YUAN J Y. A non-alternating preconditioned HSS iteration method for non-Hermitian positive definite linear systems[J]. *Computational and Applied Mathematics*, 2017, 36(1): 367-381.
- [17] ZHANG W H, YANG A L, WU Y J. Minimum residual modified HSS iteration method for a class of complex symmetric linear systems[J]. *Numerical Algorithms*, 2021, 86(4): 1543-1559.
- [18] ELMAN H C, GOLUB G H. Inexact and preconditioned Uzawa algorithms for saddle point problems[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1994, 31(6): 1645-1661.
- [19] ZHENG B, BAI Z Z, YANG X. On semi-convergence of parameterized Uzawa methods for singular saddle point problems[J]. *Linear Algebra and Its Applications*, 2009, 431(5/6/7): 808-817.
- [20] ROZLOZNIK M, SIMONCINI V. Krylov subspace methods for saddle point problems with indefinite preconditioning[J]. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2002, 24(2): 368-391.
- [21] 邵新慧, 李晨, 王心怡. 求解特定鞍点问题的改进 SOR-Like 方法[J]. *东北大学学报(自然科学版)*, 2017, 38(3): 452-456.
SHAO X H, LI C, WANG X Y. Modified SOR-like method for saddle point problems[J]. *Journal of Northeastern University(Natural Sci-*

ence), 2017, 38(3): 452-456.

[22] HAGEMAN L A, YOUNG D M. Iterative solution of large linear systems[J]. The American Mathematical Monthly, 1973, 80(1): 92.

[23] GUO P, LI C X, WU S L. A modified SOR-like method for the augmented systems[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2015, 274: 58-6.

An accelerated MSOR-Like method for solving specific saddle point problems

Zhang Litao^a, Zhu Guangxu^b

(a. School of Mathematics; b. School of Aeronautics and Astronautics, Zhengzhou University of Aeronautics, Zhengzhou 450046, China)

Abstract: To address the issues of slow convergence and high computational complexity in traditional methods for solving saddle point problems, an accelerated MSOR-Like method is proposed by introducing an acceleration factor based on the improved successive over-relaxation approach. This method enhances iteration efficiency and stability through optimized matrix splitting and parameter control, with convergence conditions established. Numerical experiments demonstrate that the proposed method outperforms the optimally parameterized MSOR-Like method in terms of both iteration count and computation time.

Keywords: saddle point problem; convergence; SOR iterative method; matrix splitting

[责任编辑 陈留院 杨浦]

河南师范大学硼化学科研团队荣获 2025 年度 河南省自然科学奖一等奖

近日,河南省人民政府正式发布了《关于 2025 年度河南省科学技术奖励的决定》,其中,河南省自然科学奖一等奖 3 项、二等奖 22 项、三等奖 8 项,河南师范大学化学化工学院陈学年教授团队申报的“硼烷和有机硼化合物的创制与应用”项目荣获 2025 年度河南省自然科学奖一等奖,该成果不仅彰显了我校在基础研究领域的领先地位,更为我国硼化学学科发展和产业升级注入强劲动能。

陈学年教授团队长期深耕硼化学基础研究,取得系列原创性突破,获国内外硼化学领域专家广泛认可,其获奖的研究成果首次阐明困扰国际学界近百年的硼簇形成机理,被国际同行评价为“将基础发现成功转化为高效合成应用”,填补了该方向理论空白,团队还突破传统认知,发展硼烷配合物在硼中子俘获疗法(BNCT)中的应用路径,为硼药研发提供关键物质与技术支持,该团队依托“河南省硼化学与先进材料重点实验室”,联合河南心连心化学工业集团等企业,构建了“基础研究—技术突破—产业转化”全链条创新体系,项目期内开发出高效硼化合物合成工艺,申请发明专利 21 件,发表 SCI 论文 100 余篇;多项成果被国际权威期刊报道,部分技术已实现产业化,助力河南省硼化学产业的转型升级。



(河南师范大学化学化工学院 陈西孟)