第 46 卷 第 6 期 河南师范大学学报(自然科学版) Vol.46 No.6
2018 年 11 月 Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition) Nov. 2018

文章编号:1000-2367(2018)06-0009-07 **DOI:**10.16366/j.cnki.1000-2367.2018.06.002

由微分算子和从属关系定义的解析函数类的包含关系

都俊杰[1a],秦川[1a],李小飞[1b,2]

(1.长江大学 a.工程技术学院;b.信息与数学学院,湖北 荆州 434020;2.澳门大学 数学系,澳门 氹仔 999078)

摘 要:研究了三类单位圆盘内利用算子函数 $\mathscr{E}^{\lambda}_{\alpha,\beta}$ 定义的单叶解析函数类 $\mathscr{S}^{\lambda}_{\alpha,\beta}(\eta;\phi)$,$\mathscr{C}^{\lambda}_{\alpha,\beta}(\eta;\phi,\psi)$,$\mathscr{R}^{\lambda}_{\alpha,\beta}(\eta,\gamma;\phi,\psi)$,运用微分从属的理论研究得到了它们的包含关系,并结合 Nunokawa 引理得到其特殊子类的包含关系.

关键词:解析函数;微分算子;微分从属;Nunokawa 引理

中图分类号:O174.51 **文献标志码:**A

设 $\mathscr{A}$ 表示单位圆盘 $\boldsymbol{U}=\{z\in\mathbf{C}:|z|<1\}$ 内具有泰勒展开式 $f(z)=z+\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{k+1}z^{k+1}$ 的单叶解析函数族,g 在 $\boldsymbol{U}$ 内解析且由下式定义 $g(z)=z+\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_{k+1}z^{k+1}$,$f$ 和 g 的 Hadamard 乘积(或卷积)定义为 $(f*g)(z)=z+\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{k+1}b_{k+1}z^{k+1}$.

称 f 从属于 g,记为 $f\prec g$ 或者 $f(z)\prec g(z)(z\in\boldsymbol{U})$,如果存在 $\boldsymbol{U}$ 内的 Schwarz 函数 $w(z)$(在 $\boldsymbol{U}$ 内解析且满足 $w(0)=0$,$|w(z)|<1$ 的函数)使得 $f(z)=g(w(z))$.特别地,如果 g 在 $\boldsymbol{U}$ 单叶,则 $f(z)\prec g(z)$ 等价于 $f(0)=g(0)$,$f(\boldsymbol{U})\subset(\boldsymbol{U})$.本文约定 $\mathscr{P}$ 表示所有的满足 $\mathscr{R}\{p(z)\}>0(z\in\boldsymbol{U})$,$p(0)=1$ 的正实部函数 $p(z)$ 组成的集合,$\mathscr{Q}$ 表示所有满足 $\phi(\boldsymbol{U})$ 为凸函数且关于实数轴对称的函数 $\phi(z)\in\mathscr{P}$ 组成的集合.若 $\phi\in\mathscr{Q}$,文献[1] 定义了函数类 $\mathscr{S}^*(\phi)$,$\mathscr{K}(\phi)$,$\mathscr{C}(\phi,\psi)$ 为:$\mathscr{S}^*(\phi)=\{f:f\in\mathscr{A},\frac{zf'(z)}{f(z)}\prec\phi(z),z\in\boldsymbol{U}\}$,$\mathscr{K}(\phi)=\{f:f\in\mathscr{A},1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\prec\phi(z),z\in\boldsymbol{U}\}$,和 $\mathscr{C}(\phi,\psi)=\{f:f\in\mathscr{A},g(z)\in\mathscr{S}^*(\psi),\frac{zf'(z)}{g(z)}\prec\phi(z),z\in\boldsymbol{U}\}$.

显然,$f(z)\in\mathscr{K}(\phi)$ 当且仅当 $zf'(z)\in\mathscr{S}^*(\phi)$.关于上述函数类及其推广,可以查阅文献[2-8].最近,文献[9] 引进了一类新奇的函数 $E^{\lambda}_{\alpha,\beta}(z)$ 如下:$E^{\lambda}_{\alpha,\beta}(z)=z+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\beta)(\lambda)_k}{\Gamma(\alpha k+\beta)k!}z^{k+1}$,这里 $\alpha>0,\beta>0,\lambda>0$,其中 Γ 表示伽马函数,$(a)_k=a(a+1)\cdots(a+k-1)$.注意到,这类函数有下面很多种重要形式:$E^1_{1,1}(z)=ze^z$;$E^2_{1,1}(z)=z(z+1)e^z$;$E^1_{2,1}(z)=z\cosh(\sqrt{z})$;$E^2_{2,1}(z)=z\cosh(\sqrt{z})+\frac{1}{2}z\sqrt{z}\sinh(\sqrt{z})$;$E^1_{2,2}(z)=\sqrt{z}\sinh(\sqrt{z})$;$E^2_{2,2}(z)=\frac{1}{2}(\sqrt{z}\sinh(\sqrt{z})+z\cosh(\sqrt{z}))$;$E^1_{2,3}(z)=6(\frac{\sinh(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}-1)$.利用函数 $E^{\lambda}_{\alpha,\beta}(z)$,结

收稿日期:2017-10-10;**修回日期:**2018-04-26.

基金项目:国家自然科学基金(11401186);湖北省教育厅科研项目(B2013181);湖北省自然科学基金(2013CFAO053);长江大学工程技术学院科技创新基金(2017KY10).

作者简介:都俊杰(1981-),女,吉林长春人,长江大学副教授,研究方向为泛函分析、数理统计,E-mail:dujunjie0420@163.com.

通信作者:李小飞(1980-),男,湖北当阳人,长江大学副教授,博士,研究方向为复分析、金融统计,E-mail:lxfei0828@163.com.

合 Hadamard 乘积,定义如下算子函数:$\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z)=z+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\beta)(\lambda)_k}{\Gamma(\alpha k+\beta)k!}a_{k+1}z^{k+1}$,本文将上述参数进行推广为 α,β,λ 均为复数,以下同.有关算子函数 $\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}$ 及其相应的性质,可以查阅文献[10-13].容易验算,算子函数具有下面的性质

$$\alpha z(\mathscr{E}_{\alpha,\beta+1}^{\lambda}f(z))'=\beta\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z)+(\alpha-\beta)\mathscr{E}_{\alpha,\beta+1}^{\lambda}f(z),\tag{1}$$

$$z(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z))'=(1-\lambda)\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z)+\lambda\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda+1}f(z).\tag{2}$$

本文利用算子函数 $\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}$ 定义了 3 类函数类如下:

$$\mathscr{S}_{\alpha,\beta}^{\lambda}(\eta;\phi)=\left\{f:f\in\mathscr{A},\frac{1}{1-\eta}\left(\frac{z(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z))'}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z)}-\eta\right)\prec\phi(z),z\in\boldsymbol{U}\right\},\tag{3}$$

$$\mathscr{C}_{\alpha,\beta}^{\lambda}(\eta;\phi,\psi)=\left\{f:f\in\mathscr{A},\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}g(z)\in\mathscr{S}^{*}(\psi),\frac{1}{1-\eta}\left(\frac{z(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z))'}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}g(z)}-\eta\right)\prec\phi(z),z\in\boldsymbol{U}\right\},\tag{4}$$

$$\mathscr{R}_{\alpha,\beta}^{\lambda}(\eta,\gamma;\phi,\psi)=\{f:f\in\mathscr{A},\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}g(z)\in\mathscr{S}^{*}(\psi),\frac{1}{1-\eta}((1-\gamma)\frac{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z)}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}g(z)}+$$

$$\gamma\frac{(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z))'}{(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}g(z))'}-\eta)\prec\phi(z),z\in\boldsymbol{U}\}.\tag{5}$$

这里 $0\leq\eta<1,\gamma\geq0$,且 $\phi,\psi\in\mathscr{Q}$.特别地,当 $\eta=0$ 时,记 $\mathscr{S}_{\alpha,\beta}^{\lambda}(0;\phi)=\mathscr{S}_{\alpha,\beta}^{\lambda}(\phi)$. 注意到,对上述 3 类函数类中的参数选取合适的值,可以退化为一些特殊的函数类:

(1)取 $\alpha=0,\lambda=1$,则函数类 $\mathscr{S}_{0,\beta}^{1}(\eta;\phi)$ 由文献[14]定义并由文献[15]进行改进研究;

(2)取 $\alpha=0,\lambda=1,\eta=0$,则函数类 $\mathscr{S}_{0,\beta}^{1}(0;\phi)$ 就是函数类 $\mathscr{S}^{*}(\phi)$,$\mathscr{C}_{0,\beta}^{1}(0;\phi,\psi)$ 为近于凸函数.

当参数设置为其他形式时,文献[16-18]也做过相应的研究.综合上述文献的研究,本文主要利用从属性质研究上述 3 类函数类的包含关系及其特殊形式的函数类的包含关系.

1 主要结论

引理 1[19] 设函数 $h(z)$ 为 $\boldsymbol{U}$ 内的凸函数且满足 $\mathscr{R}\{\beta h(z)+\gamma\}>0$,函数 $p(z)$ 在 $\boldsymbol{U}$ 内解析且满足 $p(0)=h(0)=1$, 则从属关系 $p(z)+\dfrac{zp'(z)}{\beta p(z)+\gamma}\prec h(z)\Rightarrow p(z)\prec h(z)$.

引理 2[19] 设函数 $h(z)$ 为 $\boldsymbol{U}$ 内的凸函数,$P:\boldsymbol{U}\to C$ 为 $\boldsymbol{U}$ 内的正实部函数,函数 $p(z)$ 在 $\boldsymbol{U}$ 内解析且满足 $p(0)=h(0)=1$, 则 $p(z)+P(z)\cdot zp'(z)\prec h(z)\Rightarrow p(z)\prec h(z)$.

定理 1 若 $\mathscr{R}\{\lambda\}\geq1-\eta,\mathscr{R}\{\dfrac{\beta}{\alpha}\}\geq1-\eta,\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z)\neq0(z\in\boldsymbol{U}\backslash\{0\})$,则

$$\mathscr{S}_{\alpha,\beta}^{\lambda+1}(\eta;\phi)\subset\mathscr{S}_{\alpha,\beta}^{\lambda}(\eta;\phi)\subset\mathscr{S}_{\alpha,\beta+1}^{\lambda}(\eta;\phi).$$

证明 先证明左边的包含关系.设 $f(z)\in\mathscr{S}_{\alpha,\beta}^{\lambda+1}(\eta;\phi)$,由定义得

$$\frac{1}{1-\eta}\left(\frac{z(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda+1}f(z))'}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda+1}f(z)}-\eta\right)\prec\phi(z).\tag{6}$$

记

$$p(z)=\frac{1}{1-\eta}\left(\frac{z(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z))'}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z)}-\eta\right).\tag{7}$$

容易验证 $p(z)$ 在 $\boldsymbol{U}$ 内单叶且 $p(0)=1$. 由(2)式和(7)式,可以得到下面的等式关系

$$(1-\eta)p(z)+\eta+\lambda-1=\frac{z(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z))'}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z)}+\lambda-1=\frac{z(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z))'+(\lambda-1)\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z)}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z)}=\frac{\lambda\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda+1}f(z)}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z)}.\tag{8}$$

对(8)式两边取对数后再求导数,得

$$\frac{(1-\eta)p'(z)}{(1-\eta)p(z)+\eta+\lambda-1}=\frac{(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda+1}f(z))'}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda+1}f(z)}-\frac{(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z))'}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z)}.\tag{9}$$

结合(7)式和(9)式得 $\dfrac{z(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda+1}f(z))'}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda+1}f(z)}=(1-\eta)p(z)+\eta+\dfrac{(1-\eta)zp'(z)}{(1-\eta)p(z)+\eta+\lambda-1}$, 因此

$$\frac{1}{1-\eta}\left(\frac{z(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda+1}f(z))'}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda+1}f(z)}-\eta\right)=p(z)+\frac{zp'(z)}{(1-\eta)p(z)+\eta+\lambda-1}. \tag{10}$$

由(6)式结合(10)式，得到下面的从属关系

$$p(z)+\frac{zp'(z)}{(1-\eta)p(z)+\eta+\lambda-1}\prec\phi(z). \tag{11}$$

由于 $\phi(z)\in\mathscr{Q}$ 为正实部函数，且 $\mathscr{R}\{(1-\eta)\phi(z)+\eta+\lambda-1\}>\mathscr{R}(\eta+\lambda-1)\geq 0$，因此，利用引理 1 和(11)式，得到 $p(z)\prec\phi(z)$，即 $f(z)\in\mathscr{S}_{\alpha,\beta}^{\lambda}(\eta;\phi)$，所以 $\mathscr{S}_{\alpha,\beta}^{\lambda+1}(\eta;\phi)\subset\mathscr{S}_{\alpha,\beta}^{\lambda}(\eta;\phi)$.

下面证明右边包含关系.设 $f(z)\in\mathscr{S}_{\alpha,\beta}^{\lambda}(\eta;\phi)$，则由(3)式，有

$$\frac{1}{1-\eta}\left(\frac{z(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z))'}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z)}-\eta\right)\prec\phi(z). \tag{12}$$

记

$$q(z)=\frac{1}{1-\eta}\left(\frac{z(\mathscr{E}_{\alpha,\beta+1}^{\lambda}f(z))'}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta+1}^{\lambda}f(z)}-\eta\right). \tag{13}$$

容易验证 $q(z)$ 在 $\boldsymbol{U}$ 单叶且 $q(0)=1$. 由(1)式和(13)式，有

$$(1-\eta)q(z)+\eta+\frac{\beta}{\alpha}-1=\frac{z(\mathscr{E}_{\alpha,\beta+1}^{\lambda}f(z))'}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta+1}^{\lambda}f(z)}+\frac{\beta}{\alpha}-1=$$

$$\frac{z(\mathscr{E}_{\alpha,\beta+1}^{\lambda}f(z))'+(\frac{\beta}{\alpha}-1)\mathscr{E}_{\alpha,\beta+1}^{\lambda}f(z)}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta+1}^{\lambda}f(z)}=\frac{\frac{\beta}{\alpha}\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z)}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta+1}^{\lambda}f(z)}. \tag{14}$$

(14)式两端取对数后求导数，得

$$\frac{(1-\eta)q'(z)}{(1-\eta)q(z)+\eta+\frac{\beta}{\alpha}-1}=\frac{(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z))'}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z)}-\frac{(\mathscr{E}_{\alpha,\beta+1}^{\lambda}f(z))'}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta+1}^{\lambda}f(z)}. \tag{15}$$

结合(13)式和(15)式，得 $\frac{z(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z))'}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z)}=(1-\eta)q(z)+\eta+\frac{(1-\eta)zq'(z)}{(1-\eta)q(z)+\eta+\frac{\beta}{\alpha}-1}$. 因此

$$\frac{1}{1-\eta}\left(\frac{z(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z))'}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z)}-\eta\right)=q(z)+\frac{zq'(z)}{(1-\eta)q(z)+\eta+\frac{\beta}{\alpha}-1}. \tag{16}$$

再结合(12)、(16)式，得到

$$q(z)+\frac{zq'(z)}{(1-\eta)q(z)+\eta+\frac{\beta}{\alpha}-1}\prec\phi(z). \tag{17}$$

因为 $\phi(z)\in\mathscr{Q}$ 且 $\mathscr{R}\{(1-\eta)\phi(z)+\eta+\frac{\beta}{\alpha}-1\}>\mathscr{R}\{\eta+\frac{\beta}{\alpha}-1\}\geq 0$，利用引理 1 和(17)式，得到 $f(z)\in\mathscr{S}_{\alpha,\beta+1}^{\lambda}(\eta;\phi)$，即 $\mathscr{S}_{\alpha,\beta}^{\lambda}(\eta;\phi)\subset\mathscr{S}_{\alpha,\beta+1}^{\lambda}(\eta;\phi)$. 右边的包含关系得证.

由定理 1，很容易得到下面的结合，它将在后续的定理证明过程中用到.在定理 1 中令 $\eta=0$，有

$$\mathscr{S}_{\alpha,\beta}^{\lambda+1}(\phi)\subset\mathscr{S}_{\alpha,\beta}^{\lambda}(\phi). \tag{18}$$

定理 2　若 $\mathscr{R}\{\lambda\}\geq 1$，$\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}g(z)\neq 0(z\in\boldsymbol{U}\setminus\{0\})$，则 $\mathscr{C}_{\alpha,\beta}^{\lambda+1}(\eta;\phi,\psi)\subset\mathscr{C}_{\alpha,\beta}^{\lambda}(\eta;\phi,\psi)\subset\mathscr{C}_{\alpha,\beta+1}^{\lambda}(\eta;\phi,\psi)$.

证明　先证左边的包含关系.设 $f(z)\in\mathscr{C}_{\alpha,\beta}^{\lambda+1}(\eta;\phi,\psi)$，由(4)式，有下面的从属关系

$$\frac{1}{1-\eta}\left(\frac{z(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda+1}f(z))'}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda+1}g(z)}-\eta\right)\prec\phi(z), \tag{19}$$

这里 $\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda+1}g(z)\in\mathscr{S}^{*}(\psi)$，结合(18)式，有

$$\frac{z(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda+1}g(z))'}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda+1}g(z)}\prec\psi(z)\Rightarrow\frac{z(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}g(z))'}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}g(z)}\prec\psi(z), \tag{20}$$

即 $\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda+1}g(z)\in\mathscr{S}^{*}(\psi)\Rightarrow\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}g(z)\in\mathscr{S}^{*}(\psi)$，现记

$$u(z)=\frac{1}{1-\eta}\left(\frac{z(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z))'}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}g(z)}-\eta\right). \tag{21}$$

容易验证 $u(z)$ 在 $\boldsymbol{U}$ 内解析且 $u(0)=1$. 将(21)式做恒等变形,得

$$[(1-\eta)u(z)+\eta]\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}g(z)=z(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z))'. \tag{22}$$

由于 $z(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z))'=\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}(zf'(z))$, 对(22)式两端求导数,得 $(1-\eta)u'(z)\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}g(z)+[(1-\eta)u(z)+\eta](\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}g(z))'=(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}(zf'(z)))'$, 即

$$(1-\eta)zu'(z)+[(1-\eta)u(z)+\eta]\frac{z(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}g(z))'}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}g(z)}=\frac{z(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}(zf'(z)))'}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}g(z)}. \tag{23}$$

结合(2)、(21)、(23)式,经过推导

$$\frac{z(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda+1}f(z))'}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda+1}g(z)}=\frac{\lambda\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda+1}(zf'(z))}{\lambda\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda+1}g(z)}=\frac{z(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}(zf'(z)))'+(\lambda-1)\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}(zf'(z))}{z(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}g(z))'+(\lambda-1)\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}g(z)}=$$

$$\frac{\dfrac{z(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}(zf'(z)))'}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}g(z)}+\dfrac{(\lambda-1)\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}(zf'(z))}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}g(z)}}{\dfrac{z(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}g(z))'}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}g(z)}+(\lambda-1)}=(1-\eta)\frac{zu'(z)}{\dfrac{z(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}g(z))'}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}g(z)}+\lambda-1}+(1-\eta)u(z)+\eta,$$

所以

$$\frac{1}{1-\eta}\left(\frac{z(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda+1}f(z))'}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda+1}g(z)}-\eta\right)=u(z)+\frac{zu'(z)}{Q(z)+\lambda-1}, \tag{24}$$

这里 $Q(z)=\dfrac{z(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}g(z))'}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}g(z)}\prec\psi(z)(\psi(z)\in\mathscr{Q})$. 由于

$$\mathscr{R}\left\{\frac{1}{Q(z)+\lambda-1}\right\}=\mathscr{R}\left\{\frac{\overline{Q(z)+\lambda-1}}{(Q(z)+\lambda-1)(\overline{Q(z)+\lambda-1})}\right\}=$$

$$\frac{1}{|Q(z)+\lambda-1|^{2}}\mathscr{R}\{Q(z)+\lambda-1\}>\frac{\mathscr{R}\{\lambda-1\}}{|Q(z)+\lambda-1|^{2}}\geq 0,$$

利用引理 2 和(19)、(24)式,得到 $u(z)\prec\phi(z)$,即 $f(z)\in\mathscr{C}_{\alpha,\beta}^{\lambda}(\eta;\phi,\psi)$,即 $\mathscr{C}_{\alpha,\beta}^{\lambda+1}(\eta;\phi,\psi)\subset\mathscr{C}_{\alpha,\beta}^{\lambda}(\eta;\phi,\psi)$,结论的第一部分成立.证明的第二部分同定理 1,这里由于篇幅原因故省掉.

定理 3 若 $\gamma\geq 0$, $\mathscr{N}_{\xi}^{\lambda}(a,c)g(z)\neq 0(z\in\boldsymbol{U}\backslash\{0\})$, 则 $\mathscr{R}_{\alpha,\beta}^{\lambda}(\eta,\gamma;\phi,\psi)\subset\mathscr{R}_{\alpha,\beta}^{\lambda}(\eta,0;\phi,\psi)$.

证明 当 $\gamma=0$ 时,结论显然成立,下面讨论 $\gamma>0$ 的情形.设 $f(z)\in\mathscr{R}_{\alpha,\beta}^{\lambda}(\eta,\gamma;\phi,\psi)$, 由(5)式,有从属关系

$$\frac{1}{1-\eta}\left((1-\gamma)\frac{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z)}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}g(z)}+\gamma\frac{(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z))'}{(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}g(z))'}-\eta\right)\prec\phi(z), \tag{25}$$

这里 $\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}g(z)\in\mathscr{S}^{*}(\psi)$, 即 $\dfrac{z(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}g(z))'}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}g(z)}\prec\psi(z)(\psi(z)\in\mathscr{Q})$. 记

$$s(z)=\frac{1}{1-\eta}\left(\frac{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z)}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}g(z)}-\eta\right). \tag{26}$$

容易验证 $s(z)$ 在 $\boldsymbol{U}$ 内单叶且 $s(0)=1$. 由(26)式,有

$$[(1-\eta)s(z)+\eta]\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}g(z)=\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z). \tag{27}$$

对(27)式两端求导数,得 $(1-\eta)s'(z)\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}g(z)+[(1-\eta)s(z)+\eta](\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}g(z))'=(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z))'$, 即

$$(1-\eta)s(z)+\eta+\frac{(1-\eta)s'(z)\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}g(z)}{(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}g(z))'}=\frac{(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z))'}{(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}g(z))'}. \tag{28}$$

结合(27)、(28)式,有

$$(1-\gamma)\frac{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z)}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}g(z)}+\gamma\frac{(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z))'}{(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}g(z))'}=(1-\eta)s(z)+\eta+(1-\eta)\gamma\frac{zs'(z)}{P(z)}, \tag{29}$$

这里 $P(z)=\dfrac{z(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}g(z))'}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}g(z)}\prec\psi(z)$, 由从属的定义和 $\psi(z)\in\mathscr{Q}$, 得 $\mathscr{R}\{P(z)\}>0$. 结合(25)、(29)式,有

$$s(z)+\gamma\frac{zs'(z)}{P(z)}\prec\phi(z). \tag{30}$$

而 $\mathscr{R}\left\{\frac{\gamma}{P(z)}\right\}=\mathscr{R}\left\{\frac{\gamma\overline{P(z)}}{P(z)\overline{P(z)}}\right\}=\frac{\gamma}{|P(z)|^2}\mathscr{R}\{P(z)\}>0$，利用引理 2 和(30)式，得 $s(z)\prec\phi(z)$，即 $f(z)\in\mathscr{R}_{\alpha,\beta}^{\lambda}(\eta,0;\phi,\psi)$. 定理 3 得证.

下面取 $0<\alpha\le1,\phi(z)=(\frac{1+z}{1-z})^{\alpha}$，上述 3 类函数类将退化为幅角函数类

$$\mathscr{SS}_{\alpha,\beta}^{\lambda}(\eta,\alpha)=\left\{f: f\in\mathscr{A},\left|\arg\left(\frac{z(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z))'}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z)}-\eta\right)\right|<\frac{\pi\alpha}{2},z\in\boldsymbol{U}\right\}, \tag{31}$$

$$\mathscr{SC}_{\alpha,\beta}^{\lambda}(\eta,\alpha,\psi)=\left\{f: f\in\mathscr{A},\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}g(z)\in\mathscr{S}^*(\psi),\left|\arg\left(\frac{z(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z))'}{\mathscr{N}_{\xi}^{\lambda}(a,c)g(z)}-\eta\right)\right|<\frac{\pi\alpha}{2},z\in\boldsymbol{U}\right\}，和$$

$$\mathscr{SR}_{\alpha,\beta}^{\lambda}(\eta,\gamma,\alpha,\psi)=\{f: f\in\mathscr{A},\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}g(z)\in\mathscr{S}^*(\psi),|\arg((1-\gamma)\frac{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z)}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}g(z)}+$$

$$\gamma\frac{(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z))'}{(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}g(z))'}-\eta)|<\frac{\pi\alpha}{2},z\in\boldsymbol{U}\}.$$

下面得到这几类特殊函数类的一些性质.

引理 3(Nunokawa 引理[20])　设函数 $p(z)$ 在 $\boldsymbol{U}$ 内解析，$p(z)\ne0$，且定义为 $p(z)=1+\sum_{k=m}^{\infty}p_kz^k(p_m\ne0)$. 若存在某个正数 $0<\alpha\le1$ 和 $\boldsymbol{U}$ 内某点 $z_0(|z_0|<1)$，使得在 $|z|<|z_0|$ 内有 $|\arg\{p(z)\}|<\frac{\pi\alpha}{2}(|z|<|z_0|)$，在点 z_0 处有 $|\arg\{p(z_0)\}|=\frac{\pi\alpha}{2}$，则存在实数 $l\ge\frac{m(a+a^{-1})}{2}\ge m$，使得 $\frac{z_0p'(z_0)}{p(z_0)}=\frac{2il\arg\{p(z_0)\}}{\pi}$，这里 $[p(z_0)]^{1/\alpha}=\pm ia(a>0)$.

定理 4　若 $\mathscr{R}\{\lambda\}\ge1-\eta,\mathscr{R}\{\frac{\beta}{\alpha}\}\ge1-\eta,\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z)\ne0(z\in\boldsymbol{U}\backslash\{0\})$，则存在 $r>0,m\in\mathbf{N}$ 和 $0\le\delta<\alpha$，使得 $\mathscr{SS}_{\alpha,\beta}^{\lambda+1}(\eta,\sigma)\subset\mathscr{SS}_{\alpha,\beta}^{\lambda}(\eta,\alpha)$，这里

$$\sigma=\alpha+\frac{2}{\pi}\arctan[m\alpha\cos(\frac{\pi\delta}{2})/(r+m\alpha\sin(\frac{\pi\delta}{2}))]. \tag{32}$$

证明　设 $f(z)\in\mathscr{SS}_{\alpha,\beta}^{\lambda+1}(\eta,\sigma)$，由(31)式，有

$$\left|\arg\left(\frac{z(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda+1}f(z))'}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda+1}f(z)}-\eta\right)\right|<\frac{\pi\sigma}{2}(0\le\eta<1;0<\sigma\le1), \tag{33}$$

存在函数 $\phi(z)$ 定义为 $\phi(z)=(\frac{1+z}{1-z})^{\sigma}\in\mathscr{Q}$，使得

$$\frac{1}{1-\eta}\left(\frac{z(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda+1}f(z))'}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda+1}f(z)}-\eta\right)\prec\phi(z). \tag{34}$$

定义

$$p(z)=\frac{1}{1-\eta}\left(\frac{z(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z))'}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z)}-\eta\right). \tag{35}$$

由定理 1 的分析和(34)、(35)式，有 $p(z)\prec\phi(z)$. 由于 $\phi(z)\in\mathscr{Q}$，且 $p(z)\ne0$，因此 $\arg\{p(z)\}$ 有意义.

下面利用反证法证明定理 4 的结论. 假设存在一点 $z_0(|z_0|<1)$ 和实数 $0<\alpha\le1$ 使得在 $|z|<|z_0|$ 内有 $|\arg\{p(z)\}|<\frac{\pi\alpha}{2}(|z|<|z_0|)$，在 z_0 处有 $|\arg\{p(z_0)\}|=\frac{\pi\alpha}{2}$，利用引理 4，存在实数 l 满足 $l\ge\frac{m(a+a^{-1})}{2}\ge m$，使得

$$\frac{z_0p'(z_0)}{p(z_0)}=\frac{2il\arg\{p(z_0)\}}{\pi}, \tag{36}$$

这里 $[p(z_0)]^{1/\alpha}=\pm \mathrm{i}a(a>0)$. 由(10)式,有

$$\arg\left(\frac{z(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda+1}f(z_0))'}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda+1}f(z_0)}-\eta\right)=\arg\left(p(z_0)+\frac{z_0p'(z_0)}{(1-\eta)p(z_0)+\eta+\lambda-1}\right)=$$

$$\arg\left(p(z_0)(1+\frac{z_0p'(z_0)}{p(z_0)[(1-\eta)p(z_0)+\eta+\lambda-1]})\right)=\arg\{p(z_0)\}+$$

$$\arg\left(1+\frac{z_0p'(z_0)}{p(z_0)[(1-\eta)p(z_0)+\eta+\lambda-1]}\right). \tag{37}$$

引入复数的模 $r(r>0)$ 和幅角 $\delta(0\leq\delta<\alpha)$,使得

$$(1-\eta)p(z_0)+\eta+\lambda-1=\frac{z(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z_0))'}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}f(z_0)}+\lambda-1\doteq r\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\frac{\pi\delta}{2}}.$$

如果在点 z_0 处有 $\arg\{p(z_0)\}=\frac{\pi\alpha}{2}$,则由(36)式有 $\arg\left(\frac{z(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda+1}f(z_0))'}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda+1}f(z_0)}-\eta\right)=\frac{\pi\alpha}{2}+\arg(1+\frac{\mathrm{i}l\alpha}{r}\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\frac{\pi\delta}{2}})\geq \frac{\pi\alpha}{2}+\arctan[l\alpha\cos(\frac{\pi\delta}{2})/(r+l\alpha\sin(\frac{\pi\alpha}{2}))]$. 容易验证,上式最右端的函数 $K(l)=l\alpha\cos(\frac{\pi\delta}{2})/(r+l\alpha\sin(\frac{\pi\alpha}{2}))$ 单调递增,因此由(32)式,有

$$\arg p(z_0)=\arg\left(\frac{z(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda+1}f(z_0))'}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda+1}f(z_0)}-\eta\right)\geq\frac{\pi\alpha}{2}+\arctan[m\alpha\cos(\frac{\pi\delta}{2})/(r+m\alpha\sin(\frac{\pi\alpha}{2}))]=\frac{\pi\sigma}{2}.$$

如果在点 z_0 处有 $\arg\{p(z_0)\}=-\frac{\pi\alpha}{2}$,利用相同的方法,有

$$\arg p(z_0)=\arg\left(\frac{z(\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda+1}f(z_0))'}{\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda+1}f(z_0)}-\eta\right)=-\frac{\pi\alpha}{2}+\arg(1-\frac{\mathrm{i}l\alpha}{r}e^{\mp\mathrm{i}\frac{\pi\delta}{2}})\leq$$

$$-\frac{\pi\alpha}{2}-\arctan[m\alpha\cos(\frac{\pi\delta}{2})/(r+m\alpha\sin(\frac{\pi\alpha}{2}))]=-\frac{\pi\sigma}{2}.$$

综合可得 $|\arg\{p(z_0)\}|\geq\frac{\pi\sigma}{2}$,这与条件(33)式产生矛盾,因此在 $\boldsymbol{U}$ 内不存在点 z_0 满足 $|\arg\{p(z_0)\}|=\frac{\pi\alpha}{2}$,即对所有 $z\in\boldsymbol{U}$ 都有 $|\arg\{p(z)\}|<\frac{\pi\alpha}{2}$,即 $f(z)\in\mathscr{SS}_{\alpha,\beta}^{\lambda}(\eta,\alpha)$. 定理 4 得证.

利用同样的方法,可以得到定理 5 和定理 6.

定理 5 若 $\mathscr{R}\{\lambda\}\geq 1$,$\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}g(z)\neq 0(z\in\boldsymbol{U}\backslash\{0\})$,则存在 $r_1>0$,$m\in\mathbf{N}$ 和 $0\leq\delta_1<\alpha$ 使得 $\mathscr{SC}_{\alpha,\beta}^{\lambda+1}(\eta,\sigma_1,\psi)\subset\mathscr{SC}_{\alpha,\beta}^{\lambda}(\eta,\alpha,\psi)$, 这里

$$\sigma_1=\alpha+\frac{2}{\pi}\arctan[m\alpha\cos(\frac{\pi\delta_1}{2})/(r_1+m\alpha\sin(\frac{\pi\delta_1}{2}))].$$

定理 6 若 $\gamma\geq 0$,$\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}g(z)\neq 0(z\in\boldsymbol{U}\backslash\{0\})$,则存在 $r_2>0$,$m\in\mathbf{N}$ 和 $0\leq\delta_2<\alpha$ 使得 $\mathscr{SR}_{\alpha,\beta}^{\lambda}(\eta,\gamma,\sigma_2,\psi)\subset\mathscr{SR}_{\alpha,\beta}^{\lambda}(\eta,0,\alpha,\psi)$, 这里 $\sigma_2=\alpha+\frac{2}{\pi}\arctan(m\alpha)\cos(\frac{\pi\delta_2}{2})/(r_2+m\alpha\sin(\frac{\pi\delta_2}{2}))$.

2 结束语

本文主要研究函数 $E_{\alpha,\beta}^{\lambda}(z)$[9] 结合 Hadamard 乘积引入的算子函数,定义了三类单位圆盘上的单叶解析函数类,该函数类是近于凸函数、星象函数类的推广,利用从属关系的理论,研究得到了它们的包含关系.从函数类的定义来看,不仅仅单叶函数具有此类性质,也可以将该方法和理论推广到多叶函数.对于多叶函数的简单形式,文献[21-23]进行过相应的研究.

参 考 文 献

[1] Ma W C,Minda D.A unified treatment of some special classes of univalent functions[C]//Proceedings of the Conference on Complex Analysis.Cambridge:Int. press,1992:157-169.

[2] Seoudy T.Subordination properties of certain subclasses of p-valent functions defined by an integral operator[J].Le Matematiche，2017，71(2)：27-44.

[3] Cho N E，Kwon O S，Srivastava H M.Inclusion relationships and argument properties for certain subclasses of multivalent functions associated with a family of linear operators[J].J Math Anal Appl，2004，292(2)：470-483.

[4] El-Ashwah R M，Aouf M K.Differential subordination and superordination for certain subclasses of p-valent functions[J].Math Compu Model，2010，51(5)：349-360.

[5] Shenan J M，Elkhazendar M B，Fasfous W N.Neighborhoods and partial sums of certain class of analytic and multivalent functions involving the Cho-Kwon-Srivastava operator defined by convolution[J].IUG J Natural Studies，2017，25(2)：56-63.

[6] Srivastava H M，Sharma P，Raina R K.Inclusion results for certain classes of analytic functions associated with a new fractional differintegral operator[J].RACSAM，Serie A，Matemáticas，2018，112：271-292.

[7] Chen Y，Li X，Qin C.Inclusion relationships for certain subclasses of analytic functions involving linear operator[J].J Nonlinear Sci Appl，2017，10(5)：2689-2699.

[8] Murugusundaramoorthy G，Srivastava H M.Neighborhoods of certain classes of analytic functions of complex order[J].J Inequal Pure Appl Math，2004，5(2)：1-8.

[9] Raducanu D.Third-order differential subordinations for analytic functions associated with generalized Mittag-Leffler functions[J].Mediter J Math，2017，14(4)：167-168.

[10] Ali R M，Ravichandran V，Seenivasagan N.Differential subordination and superordination of analytic functions defined by the Dziok-Srivastava linear operator[J].J Frankl Inst，2010，347：1762-1781.

[11] Baricz A，Deniz E，Caglar M，et al.Differential subordinations involving generalized Bessel functions[J].Bull Malays Math Sci Soc，2015，38(3)：1255-1280.

[12] Baricz A，Kant S，Prajapat J K.Differential subordination and superordination results associated with the Wright function[J].Bull Iran Math Soc，2016，42(6)：1459-1477.

[13] Tang H，Deniz E.Third-order differential subordination results for analytic functions involving the generalized Bessel functions[J].Acta Math Sci，2014，34B(6)：1707-1719.

[14] Wang Z G，Xu N，Acu M.Certain subclasses of multivalent analytic functions defined by multiplier transforms[J].Appl Math Comp，2010，216(1)：192-204.

[15] Darus M，Faisal I.Inclusion properties of certain subclasses of analytic functions[J].Rev Notas Math，2011，7(1)：305.

[16] 邓琴.具有复阶的解析函数族[J].数学物理学报，2011，31A(4)：1045-1054.

[17] 范臣君，秦川，李小飞.具有复阶的近于凸函数子族的系数估计[J].四川师范大学学报(自然科学版)，2016，39(6)：865-868.

[18] 敖恩.一类具有负系数的复阶解析函数类[J].赤峰学院学报(自然科学版)，2010，26(10)：1-2.

[19] Miller S S，Mocanu P T.Differential subordinations-Theory and applications[M].New York：Marcel Dekker Inc，2000.

[20] Nunokawa M.On the order of strongly starlikeness of strongly convex functions[J].Proc Japan Acad Ser A Math Sci，1993，69：234-237.

[21] Cho N E，Kwon O S，Srivastava H M.Inclusion relationships and argument properties for certain subclasses of multivalent functions associated with a family of linear operators[J].J Math Anal Appl，2004，292(2)：470-483.

[22] Srivastava H M，Patel J.Some subclasses of multivalent functions involving a certain linear operator[J].J Math Anal Appl，2005，310(1)：209-228.

[23] Prajapat J K，Raina R K，Srivastava H M.Some inclusion properties for certain subclasses of strongly starlike and strongly convex functions involving a family of fractional integral operators[J].Integral Transforms Special Functions，2007，18(9)：639-651.

Inclusion relationships for certain subclasses of analytic functions involving differntial operator and subordination

Du Junjie[1a]，Qin Chuan[1a]，LI Xiaofei[1b,2]

(1.a.College of Technology and Engineering；b.School of Information and Mathematics，Yangtze University，Jingzhou 434020，China；
2.Department of Mathematics，University of Macau，Taipa 999078，China)

Abstract：In this paper，by using the operator $\mathscr{E}_{\alpha,\beta}^{\lambda}$ we define three subclasses of analytic functions $\mathscr{S}_{\alpha,\beta}^{\lambda}(\eta;\phi)$，$\mathscr{C}_{\alpha,\beta}^{\lambda}(\eta;\phi,\psi)$，$\mathscr{R}_{\alpha,\beta}^{\lambda}(\eta,\gamma;\phi,\psi)$ in the unit disc.The object of this paper is to investigate the inclusion relationship of these subclasses with the theory of differential subordination .Combination with Nunokawa lemma，we also obtain the inclusion relationship of special subclasses.

Keywords：analytic function；differential operator；differential subordination；nunokawa lemma

［责任编校　陈留院］