

一类具有 Lévy 噪声的 COVID-19 传播动力学行为分析

谭远顺,冉崇玉

(重庆交通大学 数学与统计学院,重庆 400074)

摘要:随机扰动在传染病的传播过程中是不可避免的,为了研究这种扰动对 COVID-19 传播的影响,提出了一种同时具有白噪声和 Lévy 跳跃的随机 SIVR(易感-感染-疫苗接种-康复) 流行病模型.首先,通过构造合适的李雅普诺夫函数,证明了全局正解的存在唯一性;然后,通过定义随机系统的阈值,得到了疾病的灭绝和持续存在的充分条件.最后,数值模拟验证了理论分析的结果,结果表明高强度的 Lévy 噪声有利于快速抑制 COVID-19 的传播.

关键词:COVID-19; Lévy 噪声; 存在唯一性; 灭绝性; 持久性

中图分类号:O175

文献标志码:A

文章编号:1000-2367(2025)02-0044-10

新型冠状病毒(COVID-19)对人类健康、全球经济和社会行为产生了巨大影响^[1].该病毒潜伏期长,传播途径多样化,以及病毒的强变异性、高传染性和复发性等给疫情防控带来了极大的困难.由于目前尚无针对 COVID-19 的有效治疗或药物,接种疫苗被认为是预防新冠最有效最经济的手段^[2].

与疾病传播相关的疫苗接种计划一直是理论和应用深入分析的主题,大量学者将疫苗接种纳入到数学建模中.大多数确定性模型都源自经典的克马克·梅肯德里克 SIR 模型.随后,人们研究并扩展了许多其他模型.例如,文献[3]研究了一个具有疫苗接种的 SIV 模型,给出了多重地方性平衡和向后分岔存在的条件.文献[4]提出了一个新的 SIVR 模型,研究了疫苗接种策略与疫苗效力之间的相互作用.LIU 等^[5]创建了脉冲接种方法(PVS)和连续接种策略(CVT)的两个 SVIR 模型,研究了这两个系统的基本繁殖数对疾病动态行为的影响,结果表明,可以通过疫苗接种来减小基本繁殖数控制疾病.上述工作表明,确定性模型是研究传染病动态的主要创新之一.

然而,所有的确定性模型都没有考虑到参数及环境的变化.在现实生活中,传染病的传播过程不可避免地会发生随机干扰和随机现象^[6-7].而且在随机系统中,会考虑变量的平均值及其标准差,随机系统可以产生不同的预测.然而,当满足特定的初始条件时,确定性系统会产生相同的结果.因此,随机模型能更合理地刻画疾病的传播规律^[8-9].在这些确定性模型中引入白噪声是研究者的普遍做法.例如,TORNATORE^[10]提出了一个带有着疫苗接种的随机 SIVR 模型,讨论了疾病的持久与灭绝的阈值条件,结果表明,白噪声可以改变确定性系统的动态行为,随机扰动可以抑制疾病的传播.MAHROUF 等^[11]分析了一个具有特定非线性发病率的随机 SIVR 流行病模型,研究表明,始终需要利用非药物干预措施和疫苗接种策略来预防疾病的传播.面对突如其来的疫情,学者们也关注到利用白噪声并结合疫苗接种策略来分析 COVID-19 的动力学行为.IKRAM 等^[12]在 SIVR 模型中纳入了白噪声和时滞效应,讨论了白噪声强度和疫苗接种时间对疾病动态

收稿日期:2023-11-30;**修回日期:**2024-01-13.

基金项目:国家自然科学基金(12271068);重庆市自然科学基金创新发展联合基金(CSTB2022NSCQ-LZX0026);重庆市研究生科研创新项目(2023S0134;2023ST005).

作者简介(通信作者):谭远顺(1974—),男,湖北恩施人,重庆交通大学教授,博士,研究方向为生物数学模型的建立与分析、疾病的传播与控制,E-mail:tanys625@163.com.

引用本文:谭远顺,冉崇玉.一类具有 Lévy 噪声的 COVID-19 传播动力学行为分析[J].河南师范大学学报(自然科学版),2025,53(2):44-53.(Tan Yuanshun,Ran Chongyu. Behavioral analysis of a class of COVID-19 propagation dynamics with Lévy noise[J]. Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition),2025,53(2):44-53.DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2023.11.30.0005.)

行为的影响,结果表明,白噪声在控制 COVID-19 传播方面发挥着巨大的作用,足够大的白噪声会导致 COVID-19 的消失.

事实上,上述这些带白噪声的随机模型并不能有效地模拟传染病在传播过程中一些突发现象.研究表明,像 COVID-19 这类疾病在传播过程中有许多不确定因素.一方面,传播过程不仅会受环境等一些小的随机扰动的影响,可以用白噪声来描述;另一方面,模型参数还会受病毒基因突变等产生的剧烈波动的影响,该波动通常会高于高斯白噪声^[13].因此,为了更好地刻画这些不可预测的随机特征和突发现象,提出了一个同时包含白噪声和 Lévy 噪声的随机 SIVR 模型来更加真实合理地描述随机扰动对 COVID-19 传播的影响.

针对 COVID-19,新变异毒株对疫苗以及个体感染后所形成的免疫的逃避能力在增强,接种疫苗者和既往感染者过了免疫期都会再次感染.然而,目前还没有 COVID-19 的文章将康复者会再次感染的这个机理纳入到 SIVR 模型中.因此推广了文献[12]中的 SIVR 模型来更加真实合理地刻画 COVID-19 的传播规律.此外,奥密克戎病毒的变异性特别强,相对于先前的 BA.5,其亚型 BF.7 的传播速度更快,隐匿性和传染力加强,潜伏期及代间距更短.病毒不断变异,全球疫情形势错综复杂且存在很大的不确定性^[14-15].但大部分关于 COVID-19 的随机 SIVR 模型都只考虑了白噪声的影响.因此,为了更好地描述 COVID-19 在传播过程中的显著扰动及不确定性因素,根据 COVID-19 的传播机理及生物学因素,在推广的 SIVR 模型中同时引入白噪声和 Lévy 噪声.随后对该系统的动力学行为进行了定性、定量分析,包括正解的存在唯一性、疾病持久性和灭绝性.数值模拟和理论结果表明随机扰动会影响疾病的动态行为,而且较大的 Lévy 噪声更有利于抑制 COVID-19 传播,防止疫情反弹.本文的模型揭示了 COVID-19 的流行规律,预测了其变化发展趋势,对预防 COVID-19 的大流行有指导作用.

1 模型的建立

根据新型冠状病毒的传播机理,考虑到奥密克戎病毒的高隐匿性和强传染性,结合恢复者过了免疫期存在再次感染的传播情况,在文献[12]的基础上,建立了如下所示的 SIVR 传染病模型:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta SI - (\mu + p)S + \alpha R + \theta V, \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI + \rho \beta VI - (\lambda + \mu)I, \\ \frac{dV}{dt} = pS - \rho \beta VI - (\theta + \mu)V, \\ \frac{dR}{dt} = \lambda I - (\mu + \alpha)R. \end{cases} \quad (1)$$

在模型(1)中, t 表示时间, $S(t)$ 、 $I(t)$ 、 $V(t)$ 、 $R(t)$ 分别表示易感者、感染者、疫苗接种者、恢复者在 t 时刻的人数.参数 Λ 表示招募率, β 表示接触率, μ 表示自然死亡率, p 表示在易感人群中接种疫苗的比率, α 表示康复者再次成为易感者的比率, θ 表示疫苗接种者失效的比率, λ 表示康复率, ρ 表示疫苗接种者接触感染者的感染率. $\Lambda, \beta, \mu, p, \alpha, \theta, \lambda, \rho$ 均为正常数.

事实上,生物和流行病学现象也不可避免地受到小的随机波动或大的环境变化等影响,加入随机噪声可以真实合理地描述这些现象.对于 COVID-19,奥密克戎病毒变异性特别强,新型变异毒株在变异过程中存在很多不确定性因素,会对系统的动力学行为产生强大的波动,而布朗运动是无法很好地描述这些非常态现象,这就需要建立带有 Lévy 噪声的随机微分方程^[16-17].因此,本文建立并研究如下所示的由 Lévy 噪声驱动的随机 SIVR 传染病模型:

$$\begin{cases} dS = [\Lambda - \beta SI - (\mu + p)S + \alpha R + \theta V]dt + \delta_1 S dB_1(t) + \int_Y q_1(y)S(t-) \tilde{N}(dt, dy), \\ dI = [\beta SI + \rho \beta VI - (\lambda + \mu)I]dt + \delta_2 I dB_2(t) + \int_Y q_2(y)I(t-) \tilde{N}(dt, dy), \\ dV = [pS - \rho \beta VI - (\theta + \mu)V]dt + \delta_3 V dB_3(t) + \int_Y q_3(y)V(t-) \tilde{N}(dt, dy), \\ dR = [\lambda I - (\mu + \alpha)R]dt + \delta_4 R dB_4(t) + \int_Y q_4(y)R(t-) \tilde{N}(dt, dy). \end{cases} \quad (2)$$

模型(2)中各参数含义与模型(1)相同. $S(t-), I(t-), V(t-), R(t-)$ 分别表示 $S(t), I(t), V(t), R(t)$ 的左极限. 其中 $B_i(t) (i=1, 2, 3, 4)$ 表示在完备的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的相互独立的布朗运动, $\{F_t\}_{t \geq 0}$ 表示滤流; $\sigma_i > 0 (i=1, 2, 3, 4)$ 表示布朗运动 $B_i(t) (i=1, 2, 3, 4)$ 的强度; $q_i > -1 (i=1, 2, 3, 4)$ 表示 Lévy 跳噪声强度; $N(dt, dy)$ 表示 Poisson 随机测度, $\tilde{N}(dt, dy) = N(dt, dy) - \nu(dy)dt$, $\tilde{N}(dt, dy)$ 是 $\{F_t\}$ 适应的鞅, $\nu(dy)dt$ 是平稳补偿, ν 为定义在可测集 $Y \subset [0, \infty)$ 上的测度, 满足 $\nu(Y) < \infty$.

2 全局正解的存在唯一性

当研究流行病模型的动态行为时, 要知道该系统的解是不是全局的、非负的和有界的. 在这部分中, 将利用文献[18—19]中的李亚普诺夫分析方法来证明系统(2)的解是非负的和全局的. 系统(2)的变量 $S(t), I(t), V(t), R(t)$ 分别代表 t 时刻易感和受感染的人口密度, 因此, 它们必须是正的. 为此, 有如下定义:

$$\Gamma = \{(S(t), I(t), V(t), R(t)) \in \mathbf{R}_+^4 : S(t) + I(t) + V(t) + R(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}\}.$$

首先, 要证明 Γ 是随机系统(2)的正不变集.

定理 1 如果 $(S(0), I(0), V(0), R(0)) \in \Gamma$, 那么对所有的 $t \geq 0, ((S(t), I(t), V(t), R(t)) \in \Gamma$. 即集合 Γ 是系统(2)的正不变集.

证明 假设 $(S(0), I(0), V(0), R(0)) \in \Gamma, n_0$ 足够大且 $n_0 > 0$, 使得 $(S(0), I(0), V(0), R(0))$ 的每个分量都在区间 $(\frac{1}{n_0}, \frac{\Lambda}{\mu})$ 内. 对于每个整数 $n \geq n_0$, 将停止时间定义为: $\pi_n = \inf\{t > 0 : (S(t), I(t), V(t), R(t)) = X(t) \in \Gamma, X(t) \notin (\frac{1}{n}, \frac{\Lambda}{\mu}]^4\}$, $\pi = \inf\{t > 0 : X(t) \notin \Gamma\}$. 实际上, 需要证明对所有的 $t > 0, P(\pi < t) = 0$. 显然, $P(\pi < t) \leq P(\pi_n < t)$. 接下来, 证明 $\limsup_{n \rightarrow +\infty} P(\pi_n < t) = 0$.

构造一个如下所示的 C^2 函数 $F: \mathbf{R}_+^4 \rightarrow \mathbf{R}_+$, $F(X) = \frac{1}{S} + \frac{1}{I} + \frac{1}{V} + \frac{1}{R}$. 应用 Itô's 公式可得

$$dF(S, I, V, R) = LF(S, I, V, R)dt - \frac{\delta_1}{S}dB_1(t) - \frac{\delta_2}{I}dB_2(t) - \frac{\delta_3}{V}dB_3(t) - \frac{\delta_4}{R}dB_4(t) - \int_Y \left[\frac{q_1(y)}{S + q_1(y)S} + \frac{q_2(y)}{I + q_2(y)I} + \frac{q_3(y)}{V + q_3(y)V} + \frac{q_4(y)}{R + q_4(y)R} \right] \tilde{N}(dt, dy), \quad (3)$$

其中,

$$LF(S, I, V, R) \leq (\beta I + \mu + p + \delta_1^2 + \int_Y \frac{q_1^2(y)}{1 + q_1(y)} \nu(dy)) \frac{1}{S} + (\lambda + \mu + \delta_2^2 + \int_Y \frac{q_2^2(y)}{1 + q_2(y)} \nu(dy)) \frac{1}{I} + (\rho\beta I + \theta + \mu + \delta_3^2 + \int_Y \frac{q_3^2(y)}{1 + q_3(y)} \nu(dy)) \frac{1}{V} + (\mu + \alpha + \delta_4^2 + \int_Y \frac{q_4^2(y)}{1 + q_4(y)} \nu(dy)) \frac{1}{R}. \quad (4)$$

因此,

$$dF(S, I, V, R) \leq \eta F(X)dt - \frac{\delta_1}{S}dB_1(t) - \frac{\delta_2}{I}dB_2(t) - \frac{\delta_3}{V}dB_3(t) - \frac{\delta_4}{R}dB_4(t) - \int_Y \left[\frac{q_1(y)}{S + q_1(y)S} + \frac{q_2(y)}{I + q_2(y)I} + \frac{q_3(y)}{V + q_3(y)V} + \frac{q_4(y)}{R + q_4(y)R} \right] \tilde{N}(dt, dy), \quad (5)$$

其中,

$$\eta = \max\{\beta I + u + p + \delta_1^2 + \int_Y \frac{q_1^2(y)}{1 + q_1(y)} \nu(dy), \lambda + \mu + \delta_2^2 + \int_Y \frac{q_2^2(y)}{1 + q_2(y)} \nu(dy), \rho\beta I + \theta + \mu + \delta_3^2 + \int_Y \frac{q_3^2(y)}{1 + q_3(y)} \nu(dy), \mu + \alpha + \delta_4^2 + \int_Y \frac{q_4^2(y)}{1 + q_4(y)} \nu(dy)\}. \quad (6)$$

根据富比尼定理^[20]和 Gronwall 引理, 可以推导出

$$EF(X(t \wedge \pi_n)) \leq F(X(0))e^{\eta(t \wedge \pi_n)} \leq F(X(0))e^{\eta t}, \forall t \geq 0. \quad (7)$$

考虑到 $X(\pi_n)$ 的分量不会超过 $\frac{1}{n}$, 鉴于 $F(X(t \wedge \pi_n)) > 0$, 有

$$EF(X(t \wedge \pi_n)) \geq E[F(X(\pi_n))1_{\{\pi_n < t\}}] \geq nP(\pi_n < t), P(\pi_n < t) \leq \frac{F(X(0))e^{\mu t}}{n}, \forall t \geq 0.$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup P(\pi_n < t) = 0. \quad (8)$$

即 $P(\pi_n = \infty) = 1$, 可以得到解的存在性.

由于 $P(\pi < t) \leq P(\pi_n < t)$, 可得 $P(\pi < t) = 0$, 也就是说 $P(\pi = \infty) = 1$. 此外, 可使用文献[21]的方法, 将模型(1)的所有方程相加, 可推得 $N(t) = S(t) + I(t) + V(t) + R(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}$. 这就保证了 Γ 是有界的.

根据正不变集的定义, 可以得到集合 Γ 是系统(2)的正不变集.

定理 2 对于任何初始值 $(S(0), I(0), V(0), R(0)) \in \mathbf{R}_+^4$, 即对所有的 $t > 0$, 系统(2)有一个唯一的全局正解 $(S(t), I(t), V(t), R(t)) \in \mathbf{R}_+^4$.

证明 考虑到模型(2)系数的局部李普希兹连续性, 对于任何初始值 $(S(0), I(0), V(0), R(0)) \in \mathbf{R}_+^4$, 存在 $\pi_e > 0$, 在 $[0, \pi_e]$ 上存在唯一的局部解 $(S(t), I(t), V(t), R(t))$, π_e 表示爆炸时间. 为了证明解是全局的, 需证明 $\pi_e = \infty$. 假设 $m_0 > 0$ 足够大, 使得 $S(0), I(0), V(0)$ 和 $R(0)$ 在区间 $[\frac{1}{m_0}, m_0]$ 内. 对于每个整数 $m \geq m_0$, 定义停时:

$$\pi_m = \inf\{t \in [0, \pi_e] : S(t) \notin (\frac{1}{m}, m), I(t) \notin (\frac{1}{m}, m), V(t) \notin (\frac{1}{m}, m), R(t) \notin (\frac{1}{m}, m)\}. \quad (9)$$

显然 π_m 是递增序列. 设 $\pi_\infty = \lim_{m \rightarrow \infty} \pi_m$, 那么 $\pi_\infty \leq \pi_e$. 若 $\pi_\infty = \infty$, 那么 $\pi_e = \infty$. 因此, 对所有的 $t > 0$, $(S(t), I(t), V(t), R(t)) \in \mathbf{R}_+^4$. 相反地, 假设 $\pi_\infty < \infty$, 则存在常数 $T > 0$ 及 $\epsilon \in (0, 1)$ 使得 $P(\{\pi_\infty \leq T\}) > \epsilon$. 因此存在正整数 $m_1 \geq m_0$, 使得 $P(\{\tau_m \leq T\}) \geq \epsilon, m \geq m_1$.

定义一个 C^2 函数 $W(S, I, V, R) : \mathbf{R}_+^4 \rightarrow \mathbf{R}_+$ 如下:

$$W(S, I, V, R) = (S - a - a \ln \frac{S}{a}) + (I - 1 - \ln I) + (V - 1 - \ln V) + (R - 1 - \ln R),$$

其中, a 是一个正的常数. 应用 Itô's 公式可得

$$\begin{aligned} dW = & LWdt + \delta_1(S - a)dB_1(t) + \int_Y [q_1(y)S - a \ln(1 + q_1(y))] \tilde{N}(dt, dy) + \delta_2(I - 1)dB_2(t) + \\ & \int_Y [q_2(y)I - \ln(1 + q_2(y))] \tilde{N}(dt, dy) + \delta_3(V - 1)dB_3(t) + \int_Y [q_3(y)V - \ln(1 + \\ & q_3(y))] \tilde{N}(dt, dy) + \delta_4(R - 1)dB_4(t) + \int_Y [q_4(y)R - \ln(1 + q_4(y))] \tilde{N}(dt, dy), \end{aligned} \quad (10)$$

其中,

$$\begin{aligned} LW = & \int_Y [aq_1(y) - a \ln(1 + q_1(y)) + q_2(y) - \ln(1 + q_2(y)) + q_3(y) - \ln(1 + q_3(y)) + q_4(y) - \\ & \ln(1 + q_4(y))] v(dy) + \Lambda + 3\mu + (\mu + p)a + \theta + \lambda + \alpha + [(a + \rho)\beta - \mu]I - \mu S - \mu V - \mu R - \\ & \frac{a}{S}\Lambda - \frac{a}{S}\theta V - \frac{a}{S}aR - \beta S - \rho\beta V - \frac{pS}{V} - \frac{\lambda I}{R} + \frac{a\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2}{2}. \end{aligned} \quad (11)$$

此外, 存在一个常数 N_0 使得 $0 \leq \int_Y [q_i(y) - \ln(1 + q_i(y))] v(dy) \leq N_0, i = 1, 2, 3, 4$. 因此

$$LW \leq \Lambda + 3\mu + (\mu + p)a + \theta + \lambda + \alpha + \frac{(a + \rho)\beta\Lambda}{\mu} + \frac{a\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2}{2} + aN_0 + 3N_0 := K. \quad (12)$$

故

$$0 \leq EW(S(\pi_m \wedge T), I(\pi_m \wedge T), V(\pi_m \wedge T), R(\pi_m \wedge T)) \leq W(S(0), I(0), V(0), R(0)) + KT.$$

假设 $\Omega_m = \{\pi_m \leq T\}$, 有 $P(\Omega_m) \geq \epsilon$. 对任意的 $\omega \in \Omega_m, S(\pi_m, \omega), I(\pi_m, \omega), V(\pi_m, \omega), R(\pi_m, \omega)$ 至

少有一项等于 m 或 $\frac{1}{m}$, 那么

$$W(S(0), I(0), V(0), R(0)) + KT \geq E[1_{\Omega_m} W(S(\omega), I(\omega), V(\omega), R(\omega))] \geq \epsilon \min\{m - a - a \ln \frac{m}{a}, \frac{1}{m} - a + a \ln(am), m - 1 - \ln m, \frac{1}{m} - 1 + \ln m\},$$

其中, 1_{Ω_m} 是 Ω_m 的示性函数. 当 $m \rightarrow \infty$ 时, $\infty > W(S(0), I(0), V(0), R(0)) + KT = \infty$, 矛盾. 因此必有 $\pi_\infty = \infty$, 这意味着 $(S(t), I(t), V(t), R(t))$ 在有限时间内不会爆炸, 定理 2 得证.

3 疾病的灭绝性

在这部分内容, 将研究疾病消失的条件. 为了简单起见, 首先定义符号: $\langle x(t) \rangle_t = \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds$. 对于随机

$$\text{系统(2), 对阈值 } \tilde{R}_0 \text{ 的定义如下: } \tilde{R}_0 = \frac{\beta\Lambda + \mu \int_Y [\ln(1 + q_2(y)) - q_2(y)] v(dy)}{\mu(\lambda + \mu + \frac{\delta_2^2}{2})}.$$

定理 3 假设对任意的初值 $(S(0), I(0), V(0), R(0)) \in \mathbf{R}_+^4$, $(S(t), I(t), V(t), R(t))$ 是系统(2) 的解. 若 $\tilde{R}_0 < 1$, 那么 $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln I(t)}{t} \leq (\lambda + \mu + \frac{\delta_2^2}{2})(\tilde{R}_0 - 1)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle S(t) \rangle_t = \frac{\Lambda(\theta + \mu)}{\mu(p + \theta + \mu)}$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle V(t) \rangle_t = \frac{p\Lambda}{\mu(p + \theta + \mu)}$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle R(t) \rangle_t = 0$ a.s. 即 $I(t)$ 几乎必然以指数形式趋向于 0, 也就是说疾病会以概率 1 灭绝.

证明 将系统(2)的所有方程相加得:

$$d(S + I + V + R) = [\Lambda - \mu(S + I + V + R)]dt + \delta_1 S dB_1(t) + \delta_2 I dB_2(t) + \delta_3 V dB_3(t) + \delta_4 R dB_4(t) + \int_Y q_1(y) S \tilde{N}(dt, dy) + \int_Y q_2(y) I \tilde{N}(dt, dy) + \int_Y q_3(y) V \tilde{N}(dt, dy) + \int_Y q_4(y) R \tilde{N}(dt, dy). \quad (13)$$

对上述等式(13)从 0 到 t 积分可得:

$$\langle S(t) \rangle_t = \frac{\Lambda}{\mu} - \langle I(t) \rangle_t - \langle V(t) \rangle_t - \langle R(t) \rangle_t + \varphi_1(t), \quad (14)$$

$$\langle S(t) + V(t) \rangle_t = \frac{\Lambda}{\mu} - \langle I(t) \rangle_t - \langle R(t) \rangle_t + \varphi_1(t), \quad (15)$$

其中,

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) = & -\frac{1}{\mu} \left(\frac{S(t) - S(0)}{t} + \frac{I(t) - I(0)}{t} + \frac{V(t) - V(0)}{t} + \frac{R(t) - R(0)}{t} \right) + \frac{1}{\mu} \left[\delta_1 \frac{\int_0^t S(s) dB_1(s)}{t} + \right. \\ & \delta_2 \frac{\int_0^t I(s) dB_2(s)}{t} + \delta_3 \frac{\int_0^t V(s) dB_3(s)}{t} + \delta_4 \frac{\int_0^t R(s) dB_4(s)}{t} + \frac{\int_0^t \int_Y q_1(y) S(s) \tilde{N}(ds, dy)}{t} + \\ & \left. \frac{\int_0^t \int_Y q_2(y) I(s) \tilde{N}(ds, dy)}{t} + \frac{\int_0^t \int_Y q_3(y) V(s) \tilde{N}(ds, dy)}{t} + \frac{\int_0^t \int_Y q_4(y) R(s) \tilde{N}(ds, dy)}{t} \right]. \end{aligned}$$

借鉴文献[22]的方法, 可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_1(t) = 0$. 应用广义的 Itô's 公式,

$$\begin{aligned} d \ln I = & [\beta S + \rho \beta V - (\lambda + \mu) - \frac{\delta_2^2}{2} + \int_Y (\ln(1 + q_2(y)) - q_2(y)) v(dy)] dt + \delta_2 dB_2(t) + \\ & \int_Y \ln(1 + q_2(y)) \tilde{N}(dt, dy) \leq [\beta(S + V) - (\lambda + \mu) - \frac{\delta_2^2}{2} + \int_Y (\ln(1 + q_2(y)) - \\ & q_2(y)) v(dy)] dt + \delta_2 dB_2(t) + \int_Y \ln(1 + q_2(y)) \tilde{N}(dt, dy). \end{aligned} \quad (16)$$

结合式(15),对式(16)从 0 到 t 积分并同时除以 t 可得:

$$\frac{\ln I(t)}{t} \leq \beta \frac{\Lambda}{\mu} - (\lambda + \mu) - \frac{\delta_2^2}{2} + \int_Y (\ln(1 + q_2(y)) - q_2(y))v(dy) + \varphi_2(t), \quad (17)$$

其中 $\varphi_2(t) = \beta\varphi_1(t) + \frac{\int_0^t \delta_2 dB_2(s)}{t} + \frac{\int_0^t \int_Y \ln(1 + q_2(y))\tilde{N}(ds, dy)}{t} + \frac{\ln I(0)}{t}$. 根据强大数定理^[22]可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_2(t) = 0.$$

若 $\tilde{R}_0 < 1$, 对不等式(17)取极限可得:

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln I(t)}{t} &\leq (\lambda + \mu + \frac{\delta_2^2}{2}) \left(\frac{\beta\Lambda + \mu \int_Y (\ln(1 + q_2(y)) - q_2(y))v(dy)}{\mu(\lambda + \mu + \frac{\delta_2^2}{2})} - 1 \right) = \\ &(\lambda + \mu + \frac{\delta_2^2}{2})(\tilde{R}_0 - 1) < 0. \end{aligned}$$

故

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0 \quad \text{a.s.} \quad (18)$$

由系统(2)的最后一个方程可得:

$$\langle R(t) \rangle_t = \frac{\lambda}{\mu + \alpha} \langle I(t) \rangle_t + \frac{1}{\mu + \alpha} \left[-\frac{R(t) - R(0)}{t} + \frac{\int_0^t \delta_4 R(s) dB_4(s)}{t} + \frac{\int_0^t \int_Y q_4(y) R(s) \tilde{N}(ds, dy)}{t} \right]. \quad (19)$$

结合式(18)可得:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle R(t) \rangle_t = 0 \quad \text{a.s.} \quad (20)$$

将系统(2)的第 2 个与第 3 个方程相加,并结合式(18)和(20)有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle V(t) \rangle_t = \frac{p\Lambda}{\mu(p + \theta + \mu)} \quad \text{a.s.} \quad (21)$$

$$\text{同理可得: } \lim_{t \rightarrow \infty} \langle S(t) \rangle_t = \frac{\Lambda(\theta + \mu)}{\mu(p + \theta + \mu)} \quad \text{a.s.}$$

4 疾病的持久性

在这部分内容中,将探讨疾病持续存在的条件.定义 $\tilde{R}_{jp}$ 为:

$$\tilde{R}_{jp} = \frac{\rho\beta\Lambda + \mu \int_Y [\ln(1 + q_2(y)) - q_2(y)]v(dy)}{\mu(\lambda + \mu + \frac{\delta_2^2}{2})}.$$

定理 4 假设对任意的初值 $(S(0), I(0), V(0), R(0)) \in \mathbf{R}_+^4$, $(S(t), I(t), V(t), R(t))$ 是系统(2)的

解.若 $\tilde{R}_{jp} > 1$, 那么 $\liminf_{t \rightarrow \infty} \langle S(t) \rangle_t \geq \frac{\Lambda\mu}{\beta\Lambda + \mu^2 + p\mu} > 0$, $\liminf_{t \rightarrow \infty} \langle I(t) \rangle_t \geq \frac{(\mu + \alpha)(2\lambda + 2\mu + \delta_2^2)}{2\rho\beta(\mu + \alpha + \lambda)}(\tilde{R}_{jp} - 1) > 0$, $\liminf_{t \rightarrow \infty} \langle V(t) \rangle_t \geq \frac{p\Lambda\mu^2}{(\rho\beta\Lambda + \theta\mu + \mu^2)(\beta\Lambda + \mu^2 + p\mu)} > 0$, $\liminf_{t \rightarrow \infty} \langle R(t) \rangle_t \geq \frac{\lambda(2\lambda + 2\mu + \delta_2^2)}{2\rho\beta(\mu + \alpha + \lambda)}(\tilde{R}_{jp} - 1) > 0$ a.s.

证明 通过式(15)和(19),可以得到 $\langle S(t) + V(t) \rangle_t = \frac{\Lambda}{\mu} - (1 + \frac{\lambda}{\mu + \alpha})\langle I(t) \rangle_t + \varphi_3(t)$, 其中,

$$\varphi_3(t) = -\frac{1}{\mu + \alpha} \left[-\frac{R(t) - R(0)}{t} + \frac{\int_0^t \delta_4 R(s) dB_4(s)}{t} + \frac{\int_0^t \int_Y q_4(y) R(s) \tilde{N}(ds, dy)}{t} \right] + \varphi_1(t), \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_3(t) = 0.$$

结合式(16),可推得:

$$d \ln I \geq [\rho\beta(S+V) - (\lambda + \mu) - \frac{\delta_2^2}{2} + \int_Y (\ln(1+q_2(y)) - q_2(y))v(dy)]dt + \delta_2 dB_2(t) + \int_Y \ln(1+q_2(y))\tilde{N}(dt, dy).$$

将此不等式的两边均从 0 到 t 积分并同时除以 t 可得:

$$\frac{\ln I(t)}{t} \geq \rho\beta \frac{\Lambda}{\mu} + \int_Y (\ln(1+q_2(y)) - q_2(y))v(dy) - (\lambda + \mu) - \frac{\delta_2^2}{2} - \rho\beta(1 + \frac{\lambda}{\mu + \alpha})\langle I(t) \rangle_t + \frac{\int_0^t \delta_2 dB_2(s)}{t} + \frac{\int_0^t \int_Y \ln(1+q_2(y))\tilde{N}(ds, dy)}{t} + \varphi_4(t), \quad (22)$$

其中, $\varphi_4(t) = \rho\beta\varphi_3(t) + \frac{\ln I(0)}{t}$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_4(t) = 0$.

若 $\tilde{R}_{jp} > 1$, 可以推得:

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \langle I(t) \rangle_t \geq \frac{(\mu + \alpha)(\lambda + \mu + \frac{\delta_2^2}{2})}{\rho\beta(\mu + \alpha + \lambda)} \left[\frac{\rho\beta\Lambda + \mu \int_Y (\ln(1+q_2(y)) - q_2(y))v(dy)}{\mu(\lambda + \mu + \frac{\delta_2^2}{2})} - 1 \right] = \frac{(\mu + \alpha)(\lambda + \mu + \frac{\delta_2^2}{2})}{\rho\beta(\mu + \alpha + \lambda)} [\tilde{R}_{jp} - 1] > 0. \quad (23)$$

由式(19)可得:

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \langle R(t) \rangle_t \geq \frac{\lambda(\lambda + \mu + \frac{\delta_2^2}{2})}{\rho\beta(\mu + \alpha + \lambda)} [\tilde{R}_{jp} - 1] > 0. \quad (24)$$

同理,由系统(2)的第 1 个方程以及第 3 个方程可推得:

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \langle S(t) \rangle_t \geq \frac{\mu\Lambda}{\mu^2 + p\mu + \beta\Lambda} > 0, \liminf_{t \rightarrow \infty} \langle V(t) \rangle_t \geq \frac{p\mu}{\rho\beta\Lambda + \theta u + u^2} \frac{\Lambda u}{\beta\Lambda + \mu^2 + p\mu} > 0 \quad \text{a.s.} \quad (25)$$

5 数值模拟

为了验证上述理论分析的合理性,将在本节中进行数值模拟.采用了文献[23]中描述的数值模拟方法.

在图 1 中选择如下参数: $\Lambda = 1, \beta = 0.2, \mu = 0.35, p = 0.8, \alpha = 1, \theta = 0.5, \rho = 0.8, \lambda = 0.25, \delta_1 = 0.03, \delta_2 = 0.4, \delta_3 = 0.1, \delta_4 = 0.1, q_1(y) = 1, q_2(y) = 0.55, q_3(y) = 1, q_4(y) = 1$, 以及初始值为 $(S(0), I(0), V(0), R(0)) = (0.8, 0.6, 0.0, 0.2)$. 计算可得 $\tilde{R}_0 = 0.7582 < 1$, 这意味着该疾病会灭绝. 如图 1 所示, 可以清楚地看到当易感者 $S(t)$ 和疫苗接种者 $V(t)$ 达到最大值时, 会趋于平衡. 而该 SIVR 模型的其他组成部分, 即感染者 $I(t)$ 和恢复者 $R(t)$ 最终都会趋于零. 也就是说, 该疾病最终会消失. 同时, 还可以观察到带有随机噪声的曲线先趋于零, 带有 Lévy 噪声的曲线趋于零的速率更快. 这意味着随机噪声会加快疾病消失的速率, 与白噪声相比, Lévy 噪声更有利于促进疾病的灭绝. 通过上述的讨论, 可以得出结论: 在满足一定的阈值条件下, 疾病会灭绝, 而且 Lévy 噪声将会加速疾病的灭绝. 这与本文关于 COVID-19 灭绝性的理论结果相一致.

在图 2 中, 选择如下参数: $\Lambda = 1, \beta = 0.3, \mu = 0.3, p = 0.8, \alpha = 1, \theta = 0.21, \rho = 0.8, \lambda = 0.35, \delta_1 = 0.01, \delta_2 = 0.02, \delta_3 = 0.01, \delta_4 = 0.01, q_1(y) = 1, q_2(y) = 0.35, q_3(y) = 1, q_4(y) = 1$, 以及初始值 $(S(0), I(0), V(0), R(0)) = (0.8, 0.6, 0.0, 0.2)$. 通过计算, 得到 $\tilde{R}_{jp} = 1.1920 > 1$, 这表明该疾病会持续存在. 如图 2 所示, 观察到表示随机系统解的曲线围绕着表示确定性系统解的曲线扰动. 这意味着当噪声强度相对较小时, 随机干扰对随机系统的影响较弱, 且随机模型的动态特性与确定性模型相似. 另外, 可以清楚地看到, 与带有白噪声的

随机系统解的曲线相比,带有 Lévy 噪声的随机系统解的曲线波动更大.这表明与白噪声相比,Lévy 噪声对随机系统的影响更大.此外,还注意到 SIVR 的所有 4 个区间最终都保持在一个相对稳定的波动水平,这意味着在相对较弱的噪声下,这种疾病是持续存在的.这与有关 COVID-19 持续性的理论结果相一致.

在图 3 中,固定图 2 中的其他参数不变,只改变白噪声和 Lévy 噪声的强度, $\delta_1=0.1, \delta_2=0.6, \delta_3=0.1, \delta_4=0.1, q_1(y)=1, q_2(y)=1.5, q_3(y)=1, q_4(y)=1$. 通过计算得出确定性系统 (1) 的阈值 $R_p = \frac{\beta \Delta (\mu + \theta + \rho p)}{(\lambda \mu + \mu^2)(\mu + p + \theta)} = 1.4839 > 1$ 以及 $\tilde{R}_{jp} = 0.8532 < 1$. 如图 3 所示,在确定性系统中,感染者 $I(t)$ 和恢复者 $R(t)$ 的曲线轨迹稳定在一定水平,

但在随机系统中它们最终会趋于零.与白噪声相比,带有 Lévy 噪声的曲线波动更大,趋于零的速度更快.这表明随机噪声在疾病传播的动态过程中起着重要的作用,它对随机系统的影响不容忽视.当环境受到强烈的随机扰动时,该疾病可以得到控制,停止在人群中传播.鉴于上述数值模拟,可以得出结论:白噪声

和 Lévy 噪声都可以抑制疾病的传播,随着白噪声和 Lévy 噪声强度的增加,疾病最终消失.与白噪声相比,高强度的 Lévy 噪声更有利于快速遏制 COVID-19 的大流行.

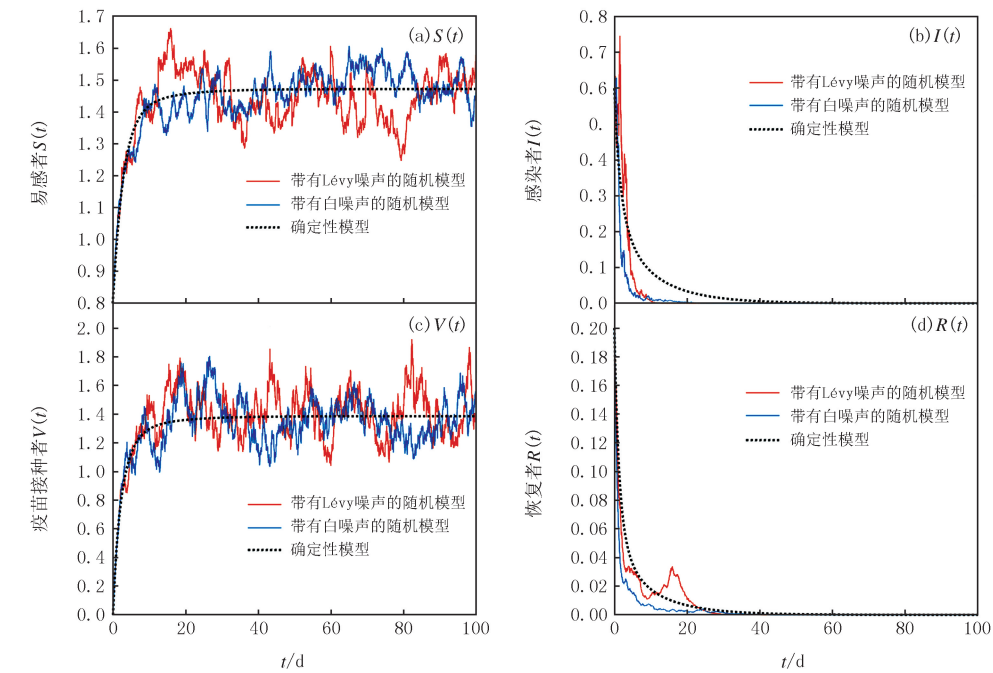


图1 在确定性系统和随机系统中疾病灭绝的趋势图
Fig.1 Trend plots of disease extinction in deterministic and stochastic systems

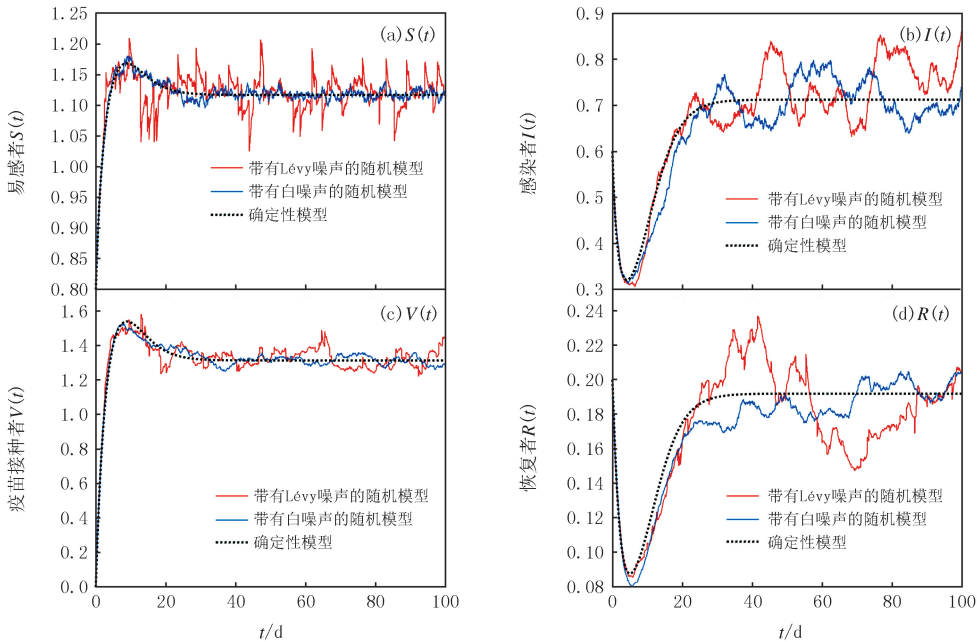


图2 在确定性系统和随机系统中疾病持久的趋势图
Fig.2 Trend plots of disease persistence in deterministic and stochastic systems

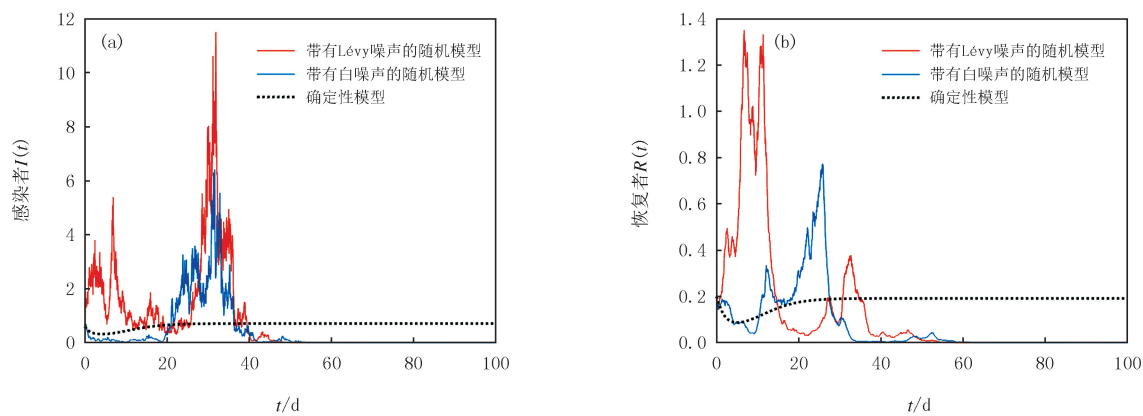


图3 在确定性系统和随机系统中 $I(t)$ 和 $R(t)$ 的变化趋势

Fig.3 Trend plots of $I(t)$ and $R(t)$ in deterministic and stochastic systems

6 结 论

本文提出了一个同时具有白噪声和 Lévy 噪声的随机 SIVR 模型来分析 COVID-19 灭绝与持续存在的条件.通过理论分析和数值模拟,对 COVID-19 的随机系统有一定的了解.为随机系统定义了具有 Lévy 跳跃的阈值 $\tilde{R}_0$ 和 $\tilde{R}_{jp}$,通过构造合适的李雅普诺夫函数来分析该流行病全局正解的存在唯一性、持久性和灭绝性.得出:当 $\tilde{R}_0 < 1$ 时,该疾病将灭绝;当 $\tilde{R}_{jp} > 1$,该疾病将持续存在.最后,通过数值模拟验证了理论分析的结果.通过分析可以得出,即使确定性系统的阈值 $R_p > 1$,疾病也会在高强度的 Lévy 噪声的影响下灭绝.发现随机噪声强度对新型冠状病毒的传播有很大的影响,尤其是高强度的 Lévy 噪声可以迅速减少感染者的数量,从而有效地控制和防止病毒的传播.这项工作揭示了随机分析为研究传染病的动态行为提供了更好的选择.

参 考 文 献

[1] ROMÁN MONTES C M,FLORES SOTO Y,GUARACHA BASAÑEZ G A,et al.Post-COVID-19 syndrome and quality of life impairment in severe COVID-19 Mexican patients[J].Frontiers in Public Health,2023,11:1155951.

[2] LURIE N,SAVILLE M,HATCHETT R,et al.Developing COVID-19 vaccines at pandemic speed[J].New England Journal of Medicine,2020,382(21):1969-1973.

[3] BRAUER F.Backward bifurcations in simple vaccination models[J].Journal of Mathematical Analysis and Applications,2004,298(2):418-431.

[4] ARINO J,MCLUSKEY C C,VAN DEN DRIESCHE P.Global results for an epidemic model with vaccination that exhibits backward bifurcation[J].SIAM Journal on Applied Mathematics,2003,64(1):260-276.

[5] LIU X N,TAKEUCHI Y,IWAMI S.SVIR epidemic models with vaccination strategies[J].Journal of Theoretical Biology,2008,253(1):1-11.

[6] ALLEN L J S.An Introduction to Stochastic Epidemic Models[M].Mathematical Epidemiology:Springer,2008.

[7] LIN Y G,JIANG D Q,XIA P Y.Long-time behavior of a stochastic SIR model[J].Applied Mathematics and Computation,2014,236:1-9.

[8] 谭伟,刘茂省.具有非单调发生率的随机离散 SIR 传染病模型的稳定性[J].河南师范大学学报(自然科学版),2023,51(3):56-65.

TAN W,LIU M X.Stability of stochastic discrete SIR epidemic model with nonmonotonic incidence rate[J].Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition),2023,51(3):56-65.

[9] 刘宗莹,张太雷,梁媛.具有心理效应和媒体影响的随机 HIV/AIDS 传染病模型[J].河南师范大学学报(自然科学版),2024,52(6):63-72.

LIU Z X,ZHANG T L,LIANG Y.A stochastic HIV/AIDS infectious disease model with psychological effects and media influence[J].Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition),2024,52(6):63-72.

[10] TORNATORE E,VETRO P,BUCCELLATO S M.SIVR epidemic model with stochastic perturbation[J].Neural Computing and Applications,2014,24:309-315.

[11] MAHROUF M,LOTFI E M,HATTAF K,et al.Non-pharmaceutical interventions and vaccination controls in a stochastic SIVR epidemic model[J].Differential Equations and Dynamical Systems,2020,31:93-111.

[12] IKRAM R,KHAN A,ZAHRI M,et al.Extinction and stationary distribution of a stochastic COVID-19 epidemic model with time-delay

[J].Computers in Biology and Medicine,2022,141:105115.

[13] FARANDA D,CASTILLO I P,HULME O,et al.Asymptotic estimates of SARS-CoV-2 infection counts and their sensitivity to stochastic perturbation[J].Chaos:An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science,2020,30(5):051107.

[14] EL SADR W M,VASAN A,EL MOHANDES A.Facing the new COVID-19 reality[J].New England Journal of Medicine,2023,388(5):385-387.

[15] 蔡雨豪,张婷婷,程扬健.新冠病毒 Omicron 变异毒株的研究进展与展望[J].生命科学研究,2023,27(3):210-216.

CAI Y H,ZHANG T T,CHENG Y J.Research progress and prospect of COVID-19 Omicron variant[J].Life Science Research,2023,27(3):210-216.

[16] APPLEBAUM D.Lévy Processes and Stochastic Calculus[M].Cambridge:Cambridge University Press,2009.

[17] CARABALLO T,EL FATINI M,EL KHALIFI M,et al.Analysis of a stochastic coronavirus (COVID-19) Lévy jump model with protective measures[J].Stochastic Analysis and Applications,2023,41(1):45-59.

[18] MAO X R.Stochastic Differential Equations and Applications[M].[S.l.]:Elsevier,2007.

[19] LIU Q,JIANG D Q.Stationary distribution and probability density for a stochastic SEIR-type model of coronavirus(COVID-19) with asymptomatic carriers[J].Chaos,Solitons & Fractals,2023,169:113256.

[20] EL FATINI M,TAKI R,TRIDANE A.Threshold behaviour of a stochastic epidemic model with two-dimensional noises[J].Physica A: Statistical Mechanics and its Applications,2019,524:776-786.

[21] CHANG Z B,MENG X Z,LU X.Analysis of a novel stochastic SIRS epidemic model with two different saturated incidence rates[J].Physica A: Statistical Mechanics and its Applications,2017,472:103-116.

[22] 王国政,刘洋.概率论与数理统计[M].重庆:重庆大学出版社,2015.

[23] PROTTER P,TALAY D.The Euler scheme for Lévy driven stochastic differential equations[J].The Annals of Probability,1997.DOI:10.1214/1024404293.

Behavioral analysis of a class of COVID-19 propagation dynamics with Lévy noise

Tan Yuanshun, Ran Chongyu

(Department of Mathematics, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China)

Abstract: Stochastic perturbations are inevitable in the transmission of infectious diseases. In order to examine the impact of disturbances on the spread of COVID-19, a SIVR (Susceptibility-Infection-Vaccination-Recovery) epidemic model with Lévy jumps as well as white noise is proposed in this paper. Initially,the existence and uniqueness of the global positive solution is proved by constructing a suitable Lyapunov function. Then, sufficient conditions for the extinction and persistence of the disease are obtained by defining the thresholds of the stochastic system. Finally, numerical simulations verify the results of the theoretical analysis, and the results show that the high-intensity Lévy noise is conducive to suppressing the propagation of COVID-19 rapidly.

Keywords: COVID-19; Lévy noise; the existence and uniqueness; extinction; persistence

[责任编辑 陈留院 杨浦]