干旱和半干旱地区植被-水系统有限时间的稳定性

胡静[1a,b,c]，朱磊[1a]，张启敏[1b,c]，任杰[2]，吴涵[3]

(1.宁夏大学 a.土木与水利工程学院;b.数学统计学院;c.宁夏数学基础学科研究中心，银川 750021;
2.宁夏医科大学 医学信息与工程学院，银川 750021;3.可口可乐(饮料)上海有限公司，上海 200123)

摘　要: 自然因素、人为因素以及地表水的渗透能够改变干旱和半干旱地区生态平衡，为了反映随机环境噪声对干旱半干旱地区生态系统的影响，建立了由 Markov 链和高斯白噪声驱动的随机时滞植被-水系统，通过随机比较原理，研究了植被及水的有限时间的动力学行为，给出了系统有限时间稳定性和有限时间收缩稳定性的充分条件.

关键词: 渗透时滞;有限时间稳定;植被-水系统

中图分类号: O29　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1000-2367(2025)03-0072-07

近年来受自然因素(降雨量少，蒸发大等)以及人为因素(不受控制的伐木、过度放牧等)的影响，干旱和半干旱地区植被生态平衡遭到了严重破坏，引起了学者的广泛关注[1-4].例如，考虑了水的空间扩散，KLAUSMEIER[1]提出一类反应扩散植被-水系统，探究干旱地区植被退化的内在原因，在该模型的基础上，进一步考虑水的渗透作用，HILLERISLAMBERS 等[2]建立了经典的三维植被-水系统模型.随着植被动力学理论的发展，许多学者从不同视角建立植被-水系统模型研究其解的适定性、持久性、绝灭性及其控制策略等[3-4].

值得注意的是，上述模型未考虑水的渗透对生态系统的影响.事实上，地表水的渗透存在时滞并且时滞大小随着时间的变化而变化[5].另一方面，环境噪声在生态系统中起着重要的作用[6]，水的蒸发和渗透以及降雨等因素经常会受到某些环境因素的干扰，使得植被-水系统的参数发生突变，这一现象通常用 Markov 切换来刻画[7].因此在研究植被-水相互作用时，应该考虑时变时滞、Markov 切换和随机噪声的影响.

有限时间稳定性(finite-time stability，FTS)和有限时间收缩稳定性(finite-time contraction stability，FTCS)在经济学、工程和医学等领域得到了广泛的关注[8-9].同样在生态学领域中，当植被遭受破坏，更需要在有限的时间得到修复.与长时间动力学行为比较，有限时间的稳定性的研究更有意义.另一方面，生态系统中，过量的植被和水对生态环境无益.而收缩稳定意味着在给定时间内，如果植被和水的密度在有限的时间内低于一定的水平，则可以视为荒漠化.这样，有限时间收缩稳定性的理论研究可为植被荒漠化预警提供可靠的理论依据.本文建立由 Markov 切换和高斯噪声驱动的随机时滞植被-水系统，研究该系统模型有限时间稳定性和有限时间收缩稳定性，给出 FTS 和 FTCS 的判据，所得到的结论是文献[1-5]的扩展.

1　系统建立

文献[10]提出如下植被-水系统:

收稿日期: 2023-10-18;**修回日期:** 2023-12-11.

基金项目: 宁夏回族自治区全职引进高层次人才科研启动项目(2023BSB03070;2022BSB03083);宁夏自然科学基金(2023AAC03181).

作者简介: 胡静(1994－)，女，四川泸州人，宁夏大学讲师，博士，研究方向为生物数学，E-mail:hujing94@nxu.edu.cn.

通信作者: 张启敏(1964－)，女，宁夏银川人，宁夏大学教授，博士，研究方向为生物数学，E-mail:zhangqimin64@sina.com.

引用本文: 胡静，朱磊，张启敏，等.干旱和半干旱地区植被-水系统有限时间的稳定性[J].河南师范大学学报(自然科学版)，2025，53(3):72-78.(Hu Jing，Zhu Lei，Zhang Qimin，et al.Finite-time stability of vegetation-water system in arid and semi-arid regions[J].Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition)，2025，53(3):72-78.DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2023.10.18.0002.)

$$\begin{cases} \mathrm{d}u(x,t)=[D_u\Delta u(x,t)+\dfrac{v(x,t)}{v(x,t)+1}u(x,t)-su(x,t)]\mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}v(x,t)=[D_v\Delta v(x,t)+\alpha\dfrac{(u(x,t)+f)}{u(x,t)+1}w(x,t)-\gamma\dfrac{v(x,t)}{v(x,t)+1}u(x,t)-zv(x,t)]\mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}w(x,t)=[D_w\Delta w(x,t)+R-\alpha\dfrac{(u(x,t)+f)}{u(x,t)+1}w(x,t)-pw(x,t)]\mathrm{d}t, \end{cases} \tag{1}$$

其中，$u(x,t)$ 为植被生物量，$v(x,t)$ 为土壤水密度，$w(x,t)$ 为地表水密度，$D_i,i=u,v,w$ 分别为植被、土壤水和地表水的扩散系数，s 为植被的死亡率，α 为渗透地表水比例，γ 为植被水吸收系数，z 为土壤水分流失率，f 为土壤渗透系数，p 为地表水的损失率. 在干旱地区，地表水主要来自降雨，为土壤提供水分. 然而，地表水的渗透并不是瞬间的，这意味着在这个过程中有时滞作用. 同时，土壤含水饱和度也影响着渗透速率. 因此，在模型(1)的基础上，考虑地表水转变为土壤水的时滞和扩散特征，则得到下列具有时滞的反应扩散植被-水的模型：

$$\begin{cases} \mathrm{d}u(x,t)=[D_u\Delta u(x,t)+\dfrac{v(x,t)}{v(x,t)+1}u(x,t)-su(x,t)]\mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}v(x,t)=[D_v\Delta v(x,t)+\alpha\dfrac{(u(x,t)+f)}{u(x,t)+1}w(x,t-\tau(t))-\gamma\dfrac{v(x,t)}{v(x,t)+1}u(x,t)-zv(x,t)]\mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}w(x,t)=[D_w\Delta w(x,t)+R-\alpha\dfrac{(u(x,t)+f)}{u(x,t)+1}w(x,t)-pw(x,t)]\mathrm{d}t, \end{cases} \tag{2}$$

其中，时滞 $\tau(t)$ 有界，即存在常数的 $\bar{\tau}>0$，使得 $0<\tau(t)\leq\bar{\tau}$. 因为，地表水渗透与土壤含水量有关：当土壤缺水时，土壤水分渗透速率快渗透时滞较小. 随着土壤含水量的增加，地表水的渗透速率减慢渗透时滞增大. 当土壤中的水接近饱和时，渗透时滞趋于一个恒定的 $\bar{\tau}$. 由此，可假设 $0\leq\dot{\tau}\leq\eta<1$. 系统(2)的所有参数均为正常数，其初始值和边界条件为

$$\vartheta(x,0)=\vartheta_0(x),x\in\Gamma,\frac{\partial\vartheta(x,t)}{\partial\boldsymbol{n}}=(\frac{\partial\vartheta(x,t)}{\partial\boldsymbol{x}_1},\frac{\partial\vartheta(x,t)}{\partial\boldsymbol{x}_2})=0,x\in\partial\Gamma,t>0,$$

其中，ϑ 表示 u，v 和 w. $\partial\Gamma$ 是 $\Gamma\subset\mathbf{R}^2$ 的边界，$\boldsymbol{n}$ 是边界的外法向量，$\psi_\vartheta(x,s)$ 是 $(-\bar{\tau},0]\times\Gamma$ 上的有界连续函数.

随机因素对有限时间动力学行为的影响不容忽视. 例如，恶劣的天气条件(如持续的高温或持续的降雨)可能会干扰植被和水的情况. 此外，修复策略对生态系统的有着重要影响. 例如，在短期内补播、维护和补水等措施会影响生态系统的动力学行为. 因此，考虑修复策略和随机因素对植被和土壤水的影响，提出如下具有 Markov 切换的随机植被-水系统：

$$\begin{cases} \mathrm{d}u(x,t)=[D_u(\zeta(t))\Delta u(x,t)+\dfrac{v(x,t)}{v(x,t)+1}u(x,t)+\pi_1(\zeta(t))u(x,t)- \\ s(\zeta(t))u(x,t)]\mathrm{d}t-\sigma_1(\zeta(t))u(x,t)\mathrm{d}B_1(t), \\ \mathrm{d}v(x,t)=[D_v(\zeta(t))\Delta v(x,t)+\alpha(\zeta(t))\dfrac{(u(x,t)+f(\zeta(t)))}{u(x,t)+1}w(x,t-\tau(t))- \\ \gamma(\zeta(t))\dfrac{v(x,t)}{v(x,t)+1}u(x,t)+\pi_2(\zeta(t))v(x,t)-z(\zeta(t))v(x,t)]\mathrm{d}t- \\ \sigma_2(\zeta(t))v(x,t)\mathrm{d}B_2(t), \\ \mathrm{d}w(x,t)=[D_w\Delta w(x,t)+R(\zeta(t))+\pi_3(\zeta(t))w(x,t)-p(\zeta(t))w(x,t)- \\ \alpha(\zeta(t))\dfrac{(u(x,t)+f(\zeta(t)))}{u(x,t)+1}w(x,t)]\mathrm{d}t-\sigma_3(\zeta(t))w(x,t)\mathrm{d}B_3(t). \end{cases} \tag{3}$$

$B_i(t)(i=1,2,3)$ 为标准布朗运动，π_1、π_2、π_3 分别代表植被、土壤水和地表水的修复强度，$\sigma_i(i=1,2,3)$ 为噪声强度. 初始状态和边界条件与系统(2) 相同. $\{\zeta(t)\}_{t\geq 0}$ 是具有有限状态空间 $S=\{1,2,\cdots,M\}$ 的右连续 Markov 链，并且独立于布朗运动 $B_i(t)(i=1,2,3)$. $\zeta(t)$ 的生成矩阵为 $\boldsymbol{O}=(p_{ij})_{M\times M}$，因此对于足够小的 $\Delta t>0$，

$$P\{\zeta(t+\Delta t)=j \mid \zeta(t)=i\}=\begin{cases} q_{ij}+o(\Delta)t, i\neq j, \\ 1+q_{ij}\Delta t+o(\Delta t), i=j, \end{cases}$$

q_{ij} 是从 i 到 j 的转移概率,并且 Δt 满足 $\lim_{\Delta t\to 0} o(\Delta t)/\Delta t=0$.如果 $i\neq j$,$q_{ij}>0\in S$ 和 $\sum_{j=1}^{M} q_{ij}=0$,$i\in S$.接下来,给出了一些必要的记号:$y(x,t)=(u(x,t)、v(x,t)、w(x,t))^{\mathrm{T}}$.$C^2(\Gamma,\mathbf{R}^3)$ 是 Γ 上连续二次可微的函数族 $y:\Gamma\to\mathbf{R}^3$.$M=L^2(\Gamma\times[0,\infty),R^3)$ 表示 $\Gamma\times[0,\infty)$ 上平方可积函数的集合,具有范数 $\|\cdot\|$,其中 $\|y(x,t)\|=(\int_\Gamma y^{\mathrm{T}}(x,t)y(x,t)\mathrm{d}x)^{1/2}$.设$(\Omega,F,(Ft)_{0\le t\le T},P)$ 是一个完备的概率空间,具有滤波 $\{(F_t)_{0\le t\le T}\}$.E 表示 P 对应的概率期望.此外,对于系统中的每个参数 a,记 $\breve{a}:=\max_{i=1,2,\cdots,M} a(i)$,$\hat{a}:=\min_{i=1,2,\cdots,M} a(i)$.接下来,研究具有时变时滞的植被-水系统的有限时间动力学行为.

2 随机植被-水系统的 FTS 和 FTCS

这一节分析具有时变时滞的随机植被-水系统(3)的 FTS 和 FTCS.利用比较原理,建立系统(3)FTS 和 FTCS 的充分条件.首先,给出随机植被-水系统的有限时间稳定和有限时间收缩稳定的定义.

定义 1 当 $B_2>B_1>0$,$y=(u,v,w)$ 且 $\|y(0)\|^2=\sup_{\tau\le t\le 0}\int_\Gamma u^2(x,t)+v^2(x,t)+w^2(x,t)\mathrm{d}x\le B_1$,可得 $\|y(t)\|^2=E\int_\Gamma u^2(x,t)+v^2(x,t)+w^2(x,t)\mathrm{d}x\le B_2$,$t\in[0,T]$,那么随机系统(3) 关于 T,B_1,B_2 有限时间稳定.

定义 2 当 $B_2>B_1>B_0>0$,$\delta\in(0,T)$,$\|y(0)\|^2=\sup_{\tau\le t\le 0}\int_\Gamma u^2(x,t)+v^2(x,t)+w^2(x,t)\mathrm{d}x\le B_1$,可得 $\|y(t)\|^2=E\int_\Gamma u^2(x,t)+v^2(x,t)+w^2(x,t)\mathrm{d}x\le B_2$,$t\in[0,T-\delta]$,并且

$$\|y(t)\|^2=E\int_\Gamma u^2(x,t)+v^2(x,t)+w^2(x,t)\mathrm{d}x\le B_0,t\in[T-\delta,T],$$

则随机系统(3)关于 T,B_0,B_1,B_2,δ 有限时间收缩稳定.

从定义 1 和 2 可以看出,如果系统有限时间收缩稳定,那么系统必然有限时间稳定,反之则不成立.注意到系统正解的存在性和唯一性是分析其动力学行为的基础,因此首先通过以下引理给出系统(3)正解的存在性和唯一性.

引理 1 对于任何给定的初值 $(u_0(x),v_0(x),w_0(x))\in\mathbf{C}^+(\Gamma)$,系统(3) 在 $t\ge 0$ 几乎处处存在唯一的全局正解$(u(x,t),v(x,t),w(x,t))$.

证明过程类似文献[11],这里省略.

在给出系统有限时间稳定性定理之前,给出如下记号

$$k_u=1+\breve{\pi}_1+\breve{\sigma}^2-\hat{s}-2\hat{d}_u\sum_{k=1}^{2}\breve{b}_k^{-2}+\breve{q}_{ii}+\sum_{j\neq i}\breve{S}\hat{S}\breve{q}_{ij},\omega_1=\ln(\hat{S}B_2)-\ln(B_1+\frac{K_2}{K_3}),$$

$$k_v=\frac{\breve{\alpha}(1+\breve{f})}{2}+\breve{\pi}_2+\breve{\sigma}_2-\hat{z}-2\hat{d}_v\sum_{k=1}^{2}\breve{b}_k^{-2}\breve{q}_{ii}+\sum_{j\neq i}\breve{S}\hat{S}\breve{q}_{ij},\omega_2=\ln(\breve{S}B_2)-\ln(B_1-\frac{K_2}{K_3}\mathrm{e}^{-K_3T}),$$

$$k_w=\breve{R}^2+\breve{\pi}_3+\breve{\alpha}(1+f)+\breve{\sigma}_3-\hat{p}-2\hat{d}_w\sum_{k=1}^{2}\breve{b}_k^{-2}\breve{q}_{ii}+\sum_{j\neq i}\breve{S}\hat{S}\breve{q}_{ij},\omega_3=\ln(\hat{S}B_0)-\ln(B_1+\frac{K_2}{K_3}),$$

$$K_2=m(\Gamma),K_3=\max\{k_u,k_v,k_w\},K_4=\max_{x\in\Gamma}\frac{\breve{\alpha}(1+\breve{f})}{2},\omega_4=\ln(\hat{S}B_2)-\ln(B_1-\frac{K_2}{K_3}\mathrm{e}^{-K_3T}).$$

定理 1 如果以下条件之一成立,则系统(3)关于(T,B_1,B_2)有限时间稳定:

A1:$K_3\ge 0,(K_3+K_4)T\le\omega_1$;

A2:$K_3<0,(\frac{K_4}{1-\eta}\mathrm{e}^{-K_3\bar{\tau}}+K_3)T+\frac{K_4\bar{\tau}}{1-\eta}\mathrm{e}^{-K_3\bar{\tau}}\le\omega_2$.

此外，如果进一步有如下条件之一成立，则系统(3)关于$(T, B_0, B_1, B_2, \delta)$有限时间收缩稳定.

A3：$K_3 \geq 0$，$(K_3 + K_4)T \leq \omega_3$；

A4：$K_3 < 0$，$(\frac{K_4}{1-\eta}\mathrm{e}^{-K_3\bar{\tau}} + K_3)T + \frac{K_4\bar{\tau}}{1-\eta}\mathrm{e}^{-K_3\bar{\tau}} \leq \omega_4$.

证明　对于给定的正常数 B_1，令 $\sup\limits_{-\tau \leq S \leq 0}\int_\Gamma u^2(x,t) + v^2(x,t) + w^2(x,t)\mathrm{d}x \leq B_1$. 选取 $Y(t) = S(i)(\int_\Gamma u^2(x,t) + v^2(x,t) + w^3(x,t)\mathrm{d}x)$，根据 Itô 公式可计算出

$$\begin{aligned}\mathrm{d}Y(t) = & S(i)\{(2\int_\Gamma D_u(i)u(x,t)\Delta u(x,t) + \frac{v(x,t)}{v(x,t)+1}u^2(x,t) - s(i)u^2(x,t) + \pi_1(i)u^2(x,t)\mathrm{d}x + \\ & 2\int_\Gamma D_v(i)v(x,t)\Delta v(x,t) - \gamma\frac{v(x,t)}{v(x,t)+1}u(x,t)v(x,t) + \alpha(i)\frac{u(x,t)+f(i)}{u(x,t)+1}w(x,t-\tau(t))v(x,t) - \\ & z(i)v^2(x,t) + \pi_2 v^2(x,t)\mathrm{d}x + 2\int_\Gamma D_w(i)w(x,t)\Delta w(x,t) - \alpha(i)\frac{u(x,t)+f(i)}{u(x,t)+1}w(x,t) + \\ & R(i)w(x,t) - p(i)w^2(x,t) + \pi_3(i)w^2(x,t)\mathrm{d}x + \int_\Gamma \sigma_1^2(i)u^2(x,t) + \sigma_2^2(i)v(x,t) + \\ & \sigma_3^2(i)w(x,t)\mathrm{d}x)\mathrm{d}t - \int_\Gamma \sigma_1(i)u^2(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}B_1(t) - \int_\Gamma \sigma_2(i)v^2(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}B_2(t) - \\ & \int_\Gamma \sigma_3(i)w^2(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}B_3(t)\} + \sum_{j=1}^M q_{ij}S_j(\int_\Gamma u^2(x,t) + v^2(x,t) + w^2(x,t))\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

通过 Green 公式以及 Young 不等式可得：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}Y(t) \leq & S(i)\{(-2(\sum_{k=1}^m b_k^{-2}\int_\Gamma D_u(i)u^2(x,t)\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^m b_k^{-2}\int_\Gamma D_v(i)v^2(x,t)\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^m b_k^{-2}\int_\Gamma D_w(i)w^2(x,t)\mathrm{d}x) + \\ & \int_\Gamma u^2(x,t)\mathrm{d}x - \int_\Gamma s(i)u^2(x,t)\mathrm{d}x + \int_\Gamma \frac{\alpha(i)(1+f(i))}{2}(w^2(x,t-\tau(t)) + v^2(x,t))\mathrm{d}x - \\ & \int_\Gamma z(i)v^2(x,t)\mathrm{d}x + \int_\Gamma \alpha(i)(1+f(i))w^2(x,t)\mathrm{d}x - \int_\Gamma p(i)w^2(x,t)\mathrm{d}x)\mathrm{d}t + \int_\Gamma \pi_1(i)u^2(x,t) + \\ & \int_\Gamma \alpha(i)(1+f(i))w^2(x,t)\mathrm{d}x - \int_\Gamma p(i)w^2(x,t)\mathrm{d}x)\mathrm{d}t + \int_\Gamma \pi_1(i)u^2(x,t) + \pi_2(i)v^2(x,t) + \\ & \pi_3(i)w^2(x,t)\mathrm{d}x)\mathrm{d}t - \int_\Gamma \sigma_1(i)u^2(x,t)\mathrm{d}B_1(x,t)\mathrm{d}x - \int_\Gamma \sigma_2(i)v^2(x,t)\mathrm{d}B_2(x,t)\mathrm{d}x - \\ & \int_\Gamma \sigma_3(i)w^2(x,t)\mathrm{d}B_3(x,t)\mathrm{d}x + m(\Gamma)\} + \sum_{j=1}^M q_{ij}S_j(\int_\Gamma u^2(x,t) + v^2(x,t) + \\ & w^2(x,t)\mathrm{d}x) + \sum_{j=1}^M q_{ij}S_j(\int_\Gamma u^2(x,t) + v^2(x,t) + w^2(x,t)\mathrm{d}x) \leq S(i)\{K_2 + \\ & K_3(\int_\Gamma u^2(x,t)\mathrm{d}x + \int_\Gamma v^2(x,t)\mathrm{d}x + \int_\Gamma w^2(x,t)\mathrm{d}x)\mathrm{d}t + K_4(\int_\Gamma u^2(x,t-\tau(t))\mathrm{d}x + \\ & \int_\Gamma v^2(x,t-\tau(t))\mathrm{d}x + \int_\Gamma w^2(x,t-\tau(t))\mathrm{d}x)\mathrm{d}t - \int_\Gamma \sigma_1(i)u^2(x,t)\mathrm{d}B_1(x,t) - \\ & \int_\Gamma \sigma_2(i)v^2(x,t)\mathrm{d}B_2(x,t) - \int_\Gamma \sigma_3(i)w^2(x,t)\mathrm{d}B_3(x,t)\}.\end{aligned}$$

上式两边同时取期望有 $\frac{\mathrm{d}EY(t)}{\mathrm{d}t} \leq K_2 + K_3EY(t) + K_4EY(t-\tau)$，$t \in [0,T]$. 选取 $W(t)$满足：

$$\begin{cases}\dot{W}(t) = K_2 + K_3W(t) + K_4W(t-\tau(t)), t \in [0,T], \\ W(s) = EY(s), \bar{\tau} \leq s \leq 0.\end{cases}$$

根据比较引理可知 $EY(t) \leq W(t)$. 进一步利用常数变易公式，对于 $t \geq 0$，

$$W(t) = -\frac{K_2}{K_3} + \mathrm{e}^{K_3t}(W(0) + \frac{K_2}{K_3}) + \int_0^t K_4W(s-\tau(s))\mathrm{e}^{K_3(t-s)}\mathrm{d}s, \tag{4}$$

接下来在不同条件下分析系统的 FTS 和 FTCS.

情形 1 $K_3\geq 0$.构造函数 $g(t)$满足以下方程

$$\begin{cases} g(t)=-\frac{K_2}{K_3}+e^{K_3 t}(\tilde{g}(0)+\frac{K_2}{K_3})+\int_0^t e^{K_3(t-s)}[K_4 g(s-\tau(s))]ds, t>0, \\ g(s)=EY, \bar{\tau}\leq t\leq 0, \end{cases} \tag{5}$$

其中,$\tilde{g}(0)=\sup\limits_{-\bar{\tau}\leq s\leq 0} g(s)$.从式(4)和(5)可知 $t\geq -\bar{\tau}$ 时有 $0\leq W(t)\leq g(t)$ 成立.定义集合 $E_1=\{t\mid t\leq \tau(t), t\in(0,\bar{\tau}]\}$,$E_2=\{t\mid t>\tau(t), t\in(0,\bar{\tau}]\}$.显然 $E_1\cup E_2=(0,\bar{\tau}]$,对于 $t\in E_1$ 有

$$g(t)-g(t-\tau(t))\geq g(t)-\tilde{g}(0)=(\tilde{g}(0)+\frac{K_2}{K_3})(e^{K_3 t}-1)+\int_0^t e^{K_3(t-s)[K_4 g(s-\tau(s))]}ds\geq 0.$$

当 $t\in E_2\cup(\bar{\tau},T]$时,

$$g(t)-g(t-\tau(t))=(e^{K_3 t}-e^{K_3(t-\tau(t))})(\tilde{g}(0)+\frac{K_2}{K_3})+\int_0^t e^{K_3(t-s)}[K_4 g(s-\tau(s))]ds-$$

$$\int_0^{t-\tau(t)} e^{K_3(t-(\bar{t})-s)}[K_4 g(s-\tau(s))]ds=e^{K_3 t}(1\frac{1}{\exp\{K_3\tau(t)\}})(\tilde{g}(0)+\frac{K_2}{K_3})+\int_0^t e^{K_3(t-s)}[K_4 g(s-$$

$$\tau(s))]ds-\int_0^{t-\tau(t)} e^{K_3(t-\tau(t)-s)}[K_4 g(s-\tau(s))]ds\geq e^{K_3 t}(1-\frac{1}{\exp\{K_3\tau(t)\}})(\tilde{g}(0)+$$

$$\frac{K_2}{K_3})+e^{K_3(t-\tau(t))}\int_{t-\tau(t)}^t e^{-K_3 s}[K_4 g(s-\tau(s))]ds\geq 0.$$

这意味着当 $t>0$ 时 $g(t)\geq g(t-\tau(t))$.因此,根据式(5)可知 $g(t)\leq(\tilde{g}(0)+\frac{K_2}{K_3})e^{K_3 t}+\int_0^t e^{K_3(t-s)}K_4 g(s)ds$.那么利用 Gronwall 不等式有 $g(t)e^{-K_3 t}\leq(\tilde{g}(0)+\frac{K_2}{K_3})e^{K_4 t}$.因此 $Y(t)\leq W(t)\leq g(t)\leq(\tilde{g}(0)+\frac{K_2}{K_3})e^{(K_3+K_4)t}\leq(B_1+\frac{K_2}{K_3})e^{(K_3+K_4)T}$.由条件 A1 $\int_\Gamma u^2(x,t)dx+\int_\Gamma v^2(x,t)dx+\int_\Gamma w^2(x,t)dx\leq B_2, t\in[0,T]$.

此外,根据条件 A3,存在 δ 使得:

$$\int_\Gamma u^2(x,t)dx+\int_\Gamma v^2(x,t)dx+\int_\Gamma w^2(x,t)dx\leq B_2, t\in[0,T-\delta],$$

$$\int_\Gamma u^2(x,t)dx+\int_\Gamma v^2(x,t)dx+\int_\Gamma w^2(x,t)dx\leq B_0, t\in[T-\delta,T].$$

情形 2 $K_3<0$.根据式(4)可得:

$$W(t)\leq W(0)e^{K_3 t}-\frac{K_2}{K_3}+\int_0^t e^{K_3(t-s)}K_4 W(s-\tau(s))ds\leq W(0)e^{K_3 t}-\frac{K_2}{K_3}+$$

$$e^{K_3(t-\bar{\tau})}\int_0^t e^{-K_3(s-\tau(s))}e^{-K_3\tau(s)}K_4 W(s-\tau(s))ds\leq W(0)e^{K_3 t}-\frac{K_2}{K_3}+\frac{e^{K_3(t-\bar{\tau})}}{1-\eta}\int_{\bar{\tau}}^t K_4 e^{-K_3 s}W(s)ds.$$

取 $q_1(t)=W(t)e^{-K_3 t}>0$,可知 $q_1(t)\leq W(0)-\frac{K_2}{K_3}e^{-K_3 t}+K_4\frac{e^{-K_3\bar{\tau}}}{1-\eta}\int_{-\bar{\tau}}^t q_1(s)ds$.

根据 Gronwall 不等式和 $0\leq\eta<1$,可计算得到

$$Y(t)\leq W(t)\leq q_1(t)e^{K_3 t}\leq(B_1\frac{K_2}{K_3}e^{-K_3 T})\exp\{(\frac{K_4}{1-\eta}e^{-K_3\bar{\tau}}+K_3)T+\frac{K_4\bar{\tau}}{1-\eta}e^{-K_3\bar{\tau}}\}.$$

条件 A2 表明 $\int_\Gamma u^2(x,t)dx+\int_\Gamma v^2(x,t)dx+\int_\Gamma w^2(x,t)dx\leq B_2, t\in[0,T]$.

此外由 A4 可知存在 δ 使得:

$$\int_\Gamma u^2(x,t)dx+\int_\Gamma v^2(x,t)dx+\int_\Gamma w^2(x,t)dx\leq B_2, t\in[0,T-\delta],$$

$$\int_\Gamma u^2(x,t)dx+\int_\Gamma v^2(x,t)dx+\int_\Gamma w^2(x,t)dx\leq B_0, t\in[T-\delta,T].$$

定理得证.

从定理 1 的条件来看，时滞 $\tau(t)$、扩散强度 D_u、D_v、D_w 和修复策略 π_1、π_2、π_3 对系统的有限时间收缩稳定性有很大的影响，这符合生物学意义.一般来说，时滞与土壤水分保持和含水量等因素有关.时滞越大，土壤质量越高，有利于植被生长和保水.同时，扩散强度越大，说明植物密度越大，土壤中水资源越丰富.显然，控制有利于植被修复和蓄水.另一方面，理论结果分别给出了系统 FTS 和 FTCS 的充分条件.如果满足条件 A1 和 A2，则可以保证植被和水的密度在给定时间内不超过最大环境容量 B_2.如果满足条件 A3 和 A4，那么植被和水的密度将低于一个很小的阈值 B_0，即荒漠化.因此，如果可以控制影响条件的系统参数，使 FTS 保持不变，但 FTCS 不满足，那么生态系统就可以在给定的时间内保持可持续发展.

3　数值模拟

本节将利用数值模拟所提出理论的有效性.假设 $T=15$、$\Gamma=[-0.1,0.1]$、$B_0=25$、$B_1=100$ 和 $B_2=400$. Markov 过程 $\zeta(t)$在 $S=\{1,2\}$中取值，

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-0.4 & 0.4\\ 0.6 & -0.6\end{pmatrix}.$$

取 $D_u(1)=0.006\,6$，$D_v(1)=0.01$，$D_w(1)=1$，$R(1)=2$，$s(1)=0.4$，$\alpha(1)=0.1$，$f(1)=0.1$，$\gamma(1)=0.1$，$z(1)=0.4$，$p(1)=0.6$，$S(1)=2$，$\pi_i(1)=0$，$\sigma_i(1)=0.5(i=1,2,3)$，$D_u(2)=0.001$，$D_v(2)=0.01$，$D_w(2)=1$，$R(2)=1$，$s(2)=0.4$，$\alpha(2)=0.1$，$f(2)=0.09$，$\gamma(2)=0.1$，$z(2)=0.4$，$p(2)=0.5$，$S(2)=2$，$\pi_i(2)=0$，$\sigma_i(2)=0.3$.假设 $\tau(s)=1$，其中 $s\in[0,T]$，因此 $\bar{\tau}=1$ 和 $\eta=0$.简单的计算可知 $K_2=0.04$，$K_3=0.43$，$K_4=0.055$.在这种情况下，定理 1 的条件 A1 和 A3 成立，这意味着系统(3)有限时间收缩稳定.数值模拟结果如图 1 所示.

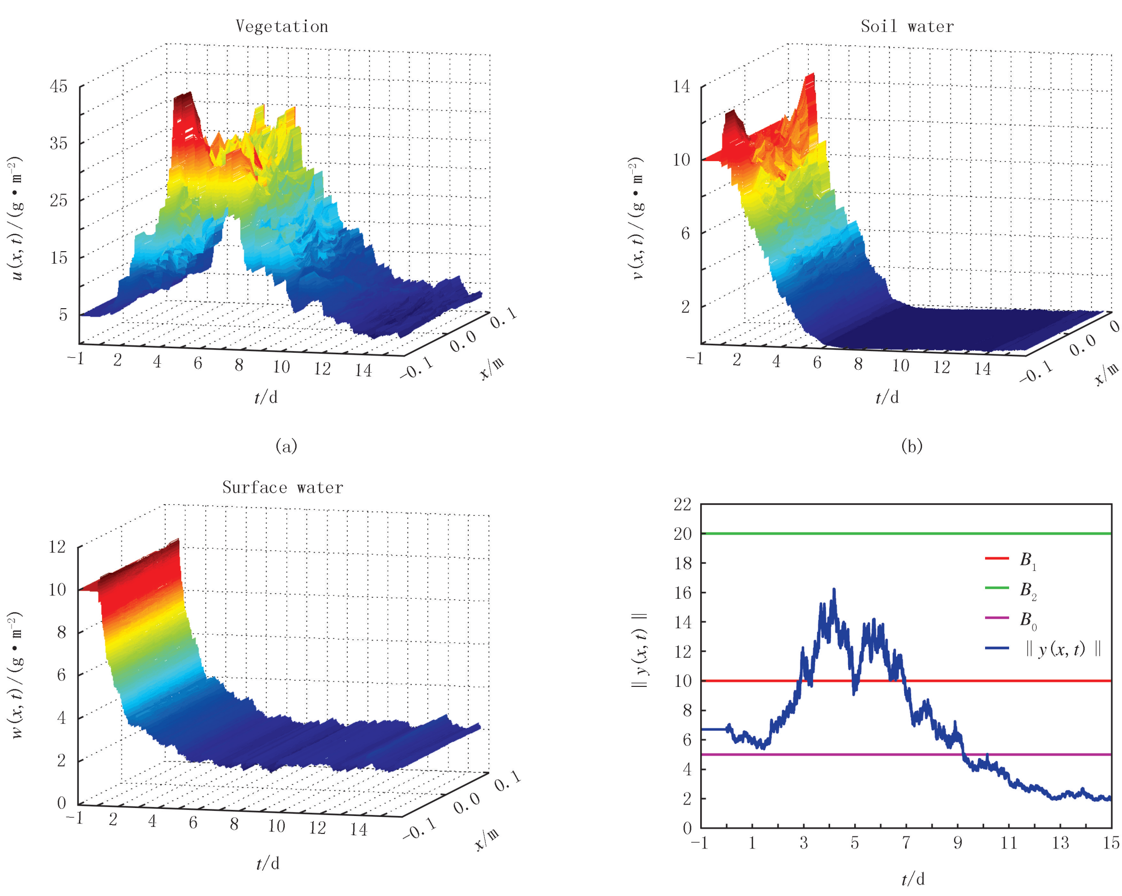

图1　具有初值$(u_0,v_0,w_0)=(5,10,12)$随机植被-水系统(2)的状态轨迹

Fig.1　State trajectories of stochastic vegetation-water system(2). $(u_0,v_0,w_0)=(5,10,12)$

4 小 结

本文提出了具有时变时滞的随机植被-水系统.分析了由 Markov 切换和高斯噪声驱动的随机系统的 FTS 和 FTCS.这些理论结果为判断生态系统能否在有限时间内保持健康的演化提供了判断标准,使得生态系统 FTS 而非 FTCS.通过数值模拟验证了理论结果的有效性.值得注意的是,植被斑图的形成是一个非常有趣的现象,这也是将来的研究内容之一.

参 考 文 献

[1] KLAUSMEIER C.Regular and irregular patterns in semiarid vegetation[J].Science,1999,284:1826-1828.

[2] HILLERISLAMBERS R,RIETKERK M,VAN DEN BOSCH F,et al.Vegetation pattern formation in semi-arid grazing systems[J].Ecology,2001,82(1):50.

[3] YIN H M,CHEN X F,WANG L H.On a cross-diffusion system modeling vegetation spots and strips in a semi-arid or arid landscape[J].Nonlinear Analysis,2017,159:482-491.

[4] WARD C B,KEVREKIDIS P G,WHITAKER N.A numerical bifurcation analysis of a dryland vegetation model[J].Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation,2019,68:319-335.

[5] HAGHNAZARI F,SHAHGHOLI H,FEIZI M.Factors affecting the infiltration of agricultural soils[J].International Journal of Agronomy and Agricultural Research,2015,6:21-35.

[6] XIANG H L,LIU B,LI Z X.Verification theory and approximate optimal harvesting strategy for a stochastic competitive ecosystem subject to lévy noise[J].Journal of Dynamical and Control Systems,2017,23(4):753-777.

[7] MIERUCH S,NOËL S,BOVENSMANN H,et al.Markov chain analysis of regional climates[J].Nonlinear Processes in Geophysics,2010,17(6):651-661.

[8] LI X D,YANG X Y,SONG S J.Lyapunov conditions for finite-time stability of time-varying time-delay systems[J].Automatica,2019,103:135-140.

[9] WU K N,CHEN B S.Synchronization of partial differential systems via diffusion coupling[J].IEEE Transactions on Circuits and Systems I:Regular Papers,2012,59(11):2655-2668.

[10] KÉFI S,EPPINGA M B,DE RUITER P C,et al.Bistability and regular spatial patterns in arid ecosystems[J].Theoretical Ecology,2010,3(4):257-269.

[11] MAO X R,RASSIAS M J.Khasminskii-type theorems for stochastic differential delay equations[J].Stochastic Analysis and Applications,2005,23(5):1045-1069.

Finite-time stability of vegetation-water system in arid and semi-arid regions

Hu Jing[1a,b,c], Zhu Lei[1a], Zhang Qimin[1b,c], Ren Jie[2], Wu Han[3]

(1. a. School of Civil Engineering and Water Conservancy; b. School of Mathematics and Statistics; c. Ningxia Basic Science Research Center of Mathematics, Ningxia University, Yinchuan 750021, China; 2. School of Medical Information and Engineering, Ningxia Medical University, Yinchuan 750021, China; 3. Coca-Cola Beverages(Shanghai) Co., Ltd., Shanghai 200123, China)

Abstract: The ecological balance in arid and semi-arid areas is seriously damaged by natural, human factors and the infiltration of surface water. In order to study the influence of random environmental noise on the ecosystem in arid and semi-arid areas, a stochastic time-delay vegetation-water system driven by Markov chain and Gaussian white noise is established in this paper. The finite-time dynamic behaviors of vegetation and water are studied by stochastic comparison principle, and the sufficient conditions for finite-time stability and finite-time contraction stability of the system are given.

Keywords: infiltration delay; finite-time stability; vegetation-water model

[责任编校 陈留院 杨浦]