

交错时序关联函数在探测铁磁旋量凝聚体激发态量子相变中的运用

赵俊杰¹, 王琪², 赵兴东², 朱遵略², 周鲁¹

(1.华东师范大学 物理与电子科学学院,上海 200241;2. 河南师范大学 物理学院,河南 新乡 453007)

摘要:交错时序关联函数(out-of-time-order correlator, OTOC)在表征量子混沌、量子信息置乱和动力学量子相变等有着广泛应用。将 OTOC 的应用于探测外磁场中 $F=1$ 旋量玻色-爱因斯坦凝聚体的激发态量子相变。利用全量子方法、平均场理论和数值模拟,研究了激发态量子相变点以及系统在其附近的动力学性质,并证明了这些特征可以被 OTOC 探测到。进一步研究表明,在不同的磁化条件下也同样可以对相变点进行探测。结果为使用 OTOC 在旋量量子气体和其他量子多体系统中的激发态量子相变的实验探测提供了理论依据。

关键词:激发态量子相变;交错时序关联函数;旋量玻色-爱因斯坦凝聚体;量子传感技术

中图分类号:O413

文献标志码:A

文章编号:1000-2367(2026)01-0099-08

近期研究已经将量子相变的研究范围从基态扩展到激发态量子相变^[1-2]。激发态量子相变(excited-state quantum phase transition, ESQPT)已经在各种量子系统中被发现,例如 Dicke 和 Rabi 模型、XY 自旋链模型、Lipkin-Meskov-Glick 模型、横场伊辛模型以及旋量玻色-爱因斯坦凝聚体(Bose-Einstein condensate, BEC)^[3-7]系统。由于 ESQPT 与动力学量子相变密切相关,可以用拓扑序参量、非平衡量子动力学或者洛施密特回波来表征^[8-10]。目前对 ESQPT 研究的工作还不是很多,主要由于实验上测量颇具挑战性^[11]。最近,交错时序关联函数(out-of-time-order correlator, OTOC)在物理学的许多领域被越来越关注,特别是在量子多体系统中^[12],已经被广泛应用于量子混沌观测、量子多体系统中的信息传输、平衡量子相变、Floquet 动态量子相变等^[13-14],实验上已经实现了应用 OTOC 来观测非平衡相变^[15]。此外,外场中的旋量 BEC 目前已经成为一个备受关注的量子模拟平台,在内部相互作用和外场调控的双重影响下,该系统的基态和激发态都具有丰富的相图^[16]。相关的理论解释已经很全面,但是仍缺乏有效的实验观测手段。本文将 OTOC 应用到该系统中来观测 ESQPT,研究了 OTOC 的动力学性质,结果表明,OTOC 的动力学行为可以表征 ESQPT,在不同磁化强度下,OTOC 对 ESQPT 依然保持着很好的探测灵敏度。

1 模型

考虑在恒定横向磁场 \mathbf{B} 下包含 N 个原子且 $F=1$ 的旋量 BEC,如图 1(a)所示。系统哈密顿量可以表示为

收稿日期:2024-04-16;修回日期:2024-05-10。

基金项目:国家自然科学基金(12074105);河南省教育厅科学技术研究重点项目(23A140001)。

作者简介:赵俊杰(1998—),男,上海人,华东师范大学硕士研究生,研究方向为原子分子物理与量子光学,E-mail: zhaojunjie_a@163.com。

通信作者:赵兴东,E-mail:phyzhxd@gmail.com;周鲁,E-mail:lzhou@phy.ecnu.edu.cn。

引用本文:赵俊杰,赵兴东,王琪,等.交错时序关联函数在探测铁磁旋量凝聚体激发态量子相变中的运用[J].河南师范大学学报(自然科学版),2026,54(1):99-106.(Zhao Junjie, Wang Qi, Zhao Xingdong, et al. Detecting excited-state quantum phase transition in a ferromagnetic spinor condensate by out-of-time-order correlator[J]. Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition), 2026, 54 (1): 99-106. DOI: 10.16366/j.cnki.1000-2367.2024.04.16.0002.)

$$\hat{H} = \frac{c}{2N} (\hat{\mathbf{S}}^2 - 2N) + q(\hat{N}_{+1} + \hat{N}_{-1}), \quad (1)$$

其中, $\hat{S}_{j=x,y,z} = \hat{a}_\alpha^\dagger F_j^{\alpha\beta} \hat{a}_\beta$ 是自旋为 $F=1$ 的矢量算符, 具有 F_j 自旋为 1 的矩阵, $\hat{\mathbf{S}}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2$, $\hat{a}_{mF} (\hat{a}_{mF}^\dagger)$ 是磁子能级 $m_F = 0, \pm 1$ 的玻色子湮灭(产生)算符。 c 和 q 分别表征了自旋碰撞相互作用能量和有效二阶塞曼能量。 $\hat{N}_{mF} = \hat{a}_{mF}^\dagger \hat{a}_{mF}$ 是原子在 $m_F = 0, \pm 1$ 塞曼态下的粒子数算符, 总原子数 N 同时也是 $\hat{N} = \sum_{mF} \hat{N}_{mF}$ 的特征值。

如图 1(a)所示, 红色、黄色和橙色实心球分别表示处于 3 种塞曼态的原子, 外部磁场 \mathbf{B} 沿着 z 轴。图 1(b)表示自旋混合动力学可以发生在 3 种不同塞曼态 $|+1\rangle, |0\rangle$ 和 $| -1\rangle$ 。通过调整参数 c 的正负性, 该系统将经历从铁磁性到反铁磁性的量子相变^[17]。这里, 重点讨论具有给定磁化强度的铁磁旋量 BEC($c < 0$)。并且, 通过调节外场参数 q 的值, 系统的基态会发生量子相变^[18], P (polar) 态-BA (broken-asymmetric) 态-TF (twin-fock) 态。 ρ_0 表示是原子数算符 \hat{N}_0 在基态下的期望值, 表达式为: $\rho_0 = \langle \psi_g | \hat{N}_0 | \psi_g \rangle / N = \langle \hat{N}_0 \rangle / N$, 是自旋相干态中重要的参数, $\Delta\rho_0$ 为其涨落。如图 1(c)所示, 铁磁旋量 BEC 在 $q/|c| = \pm 2$ 处经历相变。(i) 当 $q/|c| > 2$ 时, 基态是极化态, 所有原子都凝聚在 $m_F = 0$ 的分量中;(ii) 当 $q/|c| < -2$ 时, 基态是一个成对的相, 原子平均分配到 $m_F = \pm 1$ 分量中, 即 TF 态;(iii) 当 $-2 < q/|c| < 2$ 时, 2 个相变点包围的中间区域, 对应基态的横向磁化非对称相, 自发地破坏系统 SO(2) 对称性。对横坐标取对数之后, 如图 1(d)所示, 对于铁磁旋量 BEC, 在 BA 相, 原子数算符 \hat{N}_0 在基态下的期望值 ρ_0 聚集在 $1/2$ 处。此外, q 通常是由磁场 \mathbf{B} 感应产生的, 并且由于 $q \propto \mathbf{B}^2$ 只能取正值, 但也可以通过外加微波场修正将其调整为负值^[15]。接下来将介绍系统的激发态相图。

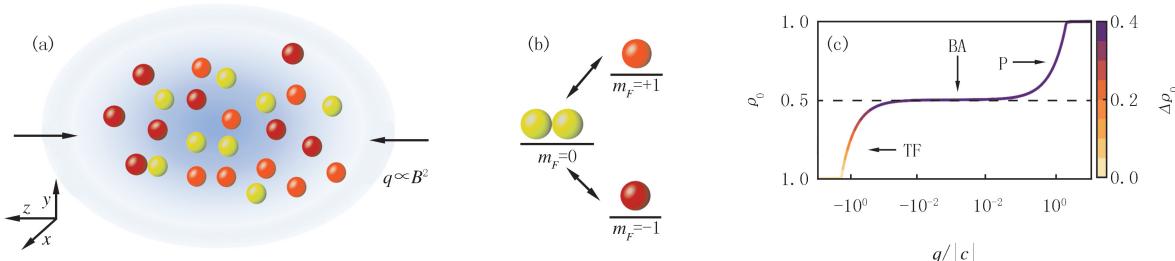


图1 外部磁场中 $F=1$ 旋量 BEC 的示意图与基态量子相变图

Fig. 1 Schematic diagram and ground-state quantum phase transition of an $F=1$ spinor BEC in an external magnetic field

2 相图

为了得到激发态的能级谱, 对哈密顿量进行精确对角化。由于磁化强度 M 是一个守恒量, $M = \langle \hat{S}_z \rangle$, 首先通过使用算子 \hat{N}_0 和 \hat{S}_z 的表示获得哈密顿量 \hat{H} 的矩阵描述, 即 $|N_0, M\rangle$, 其中 M 的范围从 $-N$ 到 N 并且 N 是粒子总数。考虑到塞曼能级 $m_F = \pm 1$ 超精细态的对称分布, 所选择的基矢可以写成:

$$|N_0, M\rangle \equiv |N_1 = \frac{N - N_0 + M}{2}, N_0, N_{-1} = \frac{N - N_0 - M}{2}\rangle. \quad (2)$$

这样, 哈密顿矩阵 \mathbf{H} 是块对角的, 由 $2N+1$ 个块组成, 维数为 $[(N-M)/2+1] \times [(N-M)/2+1]$ (这里 $[\cdot]$ 表示取整数部分), 然后通过分别对角化每个块来实现对角化哈密顿量。

在图 2(a)中对角化哈密顿量, 绘制了磁化强度为 $M=0$ 的激发态能级谱, 每 20 个本征值画 1 条谱线。然而, 在激发态的能级谱中有 ESQPT 线(蓝色实线)将量子态分为 TF', BA' 和 P', ESQPT 线由 $E = -(E_g + |q|)$ 给出^[6]。TF' 和 P' 相是根据相应的基态命名的, 而 BA' 是轴对称破缺态, 以最高能量的 BA 态命名^[19]。

当原子数 N 相对较大时, 通常使用平均场方法来获得系统的能量。在旋量 BEC 中, 对于湮灭算符 \hat{a}_{mF} ,

其海森堡演化方程为: $i\hbar \frac{\partial \hat{\Psi}_j}{\partial t} = [\hat{\Psi}_j, \hat{H}]$, $j = 0, \pm 1$ 。首先将哈密顿量式(1)中的每一项转化为产生湮灭算符

表示的形式, 将塞曼态 $m_F = 0, \pm 1$ 的湮灭算符分别带入到海森堡运动方程中, 得到 3 组耦合方程:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \hat{a}_1}{\partial t} &= 2\lambda'_a (\hat{a}_{+1}^\dagger \hat{a}_{+1} \hat{a}_{+1} - \hat{a}_{-1}^\dagger \hat{a}_{+1} \hat{a}_{-1} + \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_{+1} \hat{a}_0 + \hat{a}_{-1}^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_0) + q \hat{a}_{+1}^\dagger, \\ i\hbar \frac{\partial \hat{a}_0}{\partial t} &= 2\lambda'_a (\hat{a}_{+1}^\dagger \hat{a}_{+1} \hat{a}_0 + \hat{a}_{-1}^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_{-1} + \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_{+1} \hat{a}_{-1}), \\ i\hbar \frac{\partial \hat{a}_{-1}}{\partial t} &= 2\lambda'_a (\hat{a}_{-1}^\dagger \hat{a}_{-1} \hat{a}_{-1} - \hat{a}_{+1}^\dagger \hat{a}_{+1} \hat{a}_{-1} + \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_{-1} + \hat{a}_{+1}^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_0) + q \hat{a}_{-1}^\dagger, \end{aligned} \quad (3)$$

对于大量原子, 系统的量子涨落可以忽略不计。在单模近似下, 原子具有相同的内部自旋波函数, 波函数的态矢量由 3 个复数组成, 即 $\Psi = (\zeta_{-1}, \zeta_0, \zeta_{+1})^T$, 有实部虚部之分, 而 $\rho_i = |\zeta_i|^2 = N_i/N$ 可以全部用实数表示, 归一化条件为 $\sum_{i=-1}^1 \rho_i = \sum_{i=-1}^1 |\zeta_i|^2 = 1$, 磁化强度守恒条件为 $m = \rho_{+1} - \rho_{-1} = M/N$ 。然后可以将系统的波函数改写为 $\hat{\psi} = (\sqrt{(1-\rho_0+m)/2} e^{i\chi_+}, \sqrt{\rho_0}, \sqrt{(1-\rho_0-m)/2} e^{i\chi_-})^T$ 。其中 $\chi_\pm = \theta_\pm - \theta_0 = (\theta_s \pm \theta_m)/2$ 是自旋态的相位。 $\theta_s = \theta_{+1} + \theta_{-1} - 2\theta_0$ 是旋量相位, $\theta_m = \theta_{+1} - \theta_{-1}$ 是磁化相位。可以将动力学方程推导为在旋量相空间中的一对方程, 仅包含 ρ_0 和 θ_s , 这里磁化强度 m 是有限的,

$$\rho_0 = \frac{2c}{\hbar} \rho_0 \sqrt{(1-\rho_0)^2 - m^2} \sin \theta_s, \hat{\theta}_s = \frac{2c}{\hbar} [(1-2\rho_0) + \frac{(1-\rho_0)(1-2\rho_0)-m^2}{\sqrt{(1-\rho_0)^2 - m^2}} \cos \theta_s]. \quad (4)$$

和全量子理论相比, 平均场方法大大减少了系统参数的数量, 参数的数量从 $N/2+1$ 减少到几个参数 ρ_i 和 θ_s 。与此同时, 平均场近似中的系统能量

$$\epsilon = c\rho_0 [(1-\rho_0) + \sqrt{(1-\rho_0)^2 - m^2} \cos \theta_s] + \frac{c}{2} m^2 + q(1-\rho_0). \quad (5)$$

通过平均场能量表达式, 可以得到 (ρ_0, θ_s) 空间中的相图。

由于自旋相干态在实验上更容易制备, 并可以通过将不同 q 值下的平均场相图投影到自旋向列空间 $\{S_\perp, Q_\perp, 2\rho_0-1\}$ 中, 初始自旋相干态的动力学特征可以用自旋相列球(也称布洛赫球)上的轨迹进行表示。选取了初态为 $\{\rho_0=0, m=0, \theta_s=0, \theta_m=0\}$ 的自旋相干态。首先, 绘制该自旋相干态的平均场能量 ϵ , 如图 2(a)中的红线所示。这条线和 ESQPT 线(蓝色实线)的交点向展示了在自旋相干态中的量子相变点, 即 $q/|c| = -0.6$ 和 1.4 。在图 2(b)和(c)中, 绘制了左右相变点处不同的 (ρ_0, θ_s) 相空间。根据方程(5)将系统平均场能量分布 E_{mf} 插入到相空间 (ρ_0, θ_s) 中。这里, 为了避免计算额外的复杂性, 仅分析 $\theta_s=0$ 的相空间。对于零磁化强度 $m=0$, 可以看到旋量能量主要集中在 $q/|c| < 0$ 时的负值, 而在 $q/|c| > 0$ 时集中在正值。对于铁磁旋量 BEC, 外部区域对应于更高的能量。为了更好地区分 3 种激发态量子相, 通过控制参数 q 和激发能量 $\Delta = \epsilon_n - \epsilon_g$ 来选择图 2(a)中的 3 个不同点, 以观察其在一个周期内随时间的演化, 其中 ϵ_g 和 ϵ_n 是基态本征值和激发态本征值。其中, 绿点和紫点具有相同的激发态能量, 蓝点和紫点具有相同的二次塞曼能量参数 q 。在图 2(d)中显示了对于不同 q 和 Δ 的自旋压缩向列球轨迹。已知 \hat{Q} 是 4 级张量算符, 表示为 $\hat{Q}_{ij} = \hat{S}_i \hat{S}_j + \hat{S}_j \hat{S}_i - (4/3)\delta_{ij}$ 。其中 $i, j \in \{x, y, z\}$, 这里 δ_{ij} 是 Kronecker delta 函数。并且 $S_i = \langle \psi | \hat{S}_i | \psi \rangle$, $Q_{ij} = \langle \psi | \hat{S}_{ij} | \psi \rangle$, 此时, 令横向自旋 $S_\perp^2 = S_x^2 + S_y^2$, 横向非对角向列部分 $Q_\perp^2 = Q_{xz}^2 + Q_{yz}^2$, 可以得到以下关系 $S_\perp^2 + Q_\perp^2 + (2\rho_0 - 1)^2 = 1$, 这里 $2\rho_0 - 1 \propto Q_{zz}$ 。这样, 平均场动力学性质可以很好地用布洛赫球表示来进行描述。3 条不同颜色的线: 绿色、蓝色和紫色分别代表 TF'、BA' 和 P' 相。此外, 黑点表示初始点位置。

由于自旋碰撞相互作用和外场控制的塞曼能级分裂之间的相互作用, 铁磁旋量 BEC 在基态和激发态都具有丰富的相图。已经通过结合量子方法和平均场理论成功获得了 ESQPT 点。在下一节中, 将集中探讨这些临界相变点, 并用 OTOC 方法展示它们周围的系统动力学特征。

3 OTOC 与 ESQPT

近年来, 由于量子关联性的实验检测技术, 以及原子-分子或光子等系统的量子控制技术的提升, OTOC 可以直接在自旋和离子阱系统中进行观测。因为 OTOC 与局部序参量如粒子数随时间变化的平均值、磁化

强度相比而言,暗含了本征态之间的高阶项关联性,这有望揭示 ESQPT 的新特征。事实上,ESQPT 的特征如何改变 OTOC 的动力学特性已经在其他一些系统的早期工作中揭示出来了^[20]。其基本原理如下:给定系统的哈密顿量 H 、初始状态 $|\Psi_0\rangle$,以及 2 个算符 \hat{W} 和 \hat{V} , \hat{W} 随时间的展开 $\hat{W}(t)$ 可以通过计算算符 $\hat{W}(0)$ 的对易子模的平方的期望值来探测,即

$$C(t) = \langle [\hat{W}(t), \hat{V}(0)]^2 \rangle = 2\text{Re}[A(t)] - 2\text{Re}[F(t)], \quad (6)$$

其中, $[\cdot]$ 表示对初态 $|\Psi_0\rangle$ 取平均, $\hat{W}(t)$ 是海森堡表象中的算符,满足关系 $\hat{W}(t) = \hat{U}^\dagger(t)\hat{W}(0)\hat{U}(t)$ 和 $\hat{U}(t) = \exp(-i\hat{H}t)$ 。 $C(t)$ 可以分为 2 个部分,第 1 项定义为 $A(t) = \langle \hat{V}(0)^\dagger \hat{W}^\dagger(t) \hat{W}(t) \hat{V}(0) \rangle$,它的长期演化将趋向于一个常数。相反,第 2 个组成部分

$$F(t) = \langle \hat{W}^\dagger(t) \hat{V}(0)^\dagger \hat{W}(t) \hat{V}(0) \rangle \quad (7)$$

具有非时间顺序和显著的时间依赖性,也称为超时顺序。显然, $C(t)$ 的长时间动力学特性由 $F(t)$ 决定,即 OTOC。如果 \hat{W} 和 \hat{V} 是幺正算符,即 $\hat{W}^\dagger(t)\hat{W}(t) = \hat{I}$,可以得到 $A(t) = \langle \hat{V}(0)^\dagger \hat{W}^\dagger(t) \hat{W}(t) \hat{V}(0) \rangle = \langle \hat{V}(0)^\dagger \hat{V}(0) \rangle = 1$,那么式(7)中的 $C(t)$ 值可以简化为 $C(t) = 2(1 - \text{Re}[F(t)])$ 。在这种情况下, $C(t)$ 的对时间的依赖性完全由 $F(t)$ 决定。OTOC 是一个十分重要的物理量,用于评估算符 $\hat{W}(t)$ 干扰的扰动是如何随时间在系统中传播。其值越高,2 个算符 $\hat{W}(t)$ 和 $\hat{V}(0)$ 之间的相关性越强。OTOC 在短时间内的呈指数增长特性是量子混沌存在的最好证明。

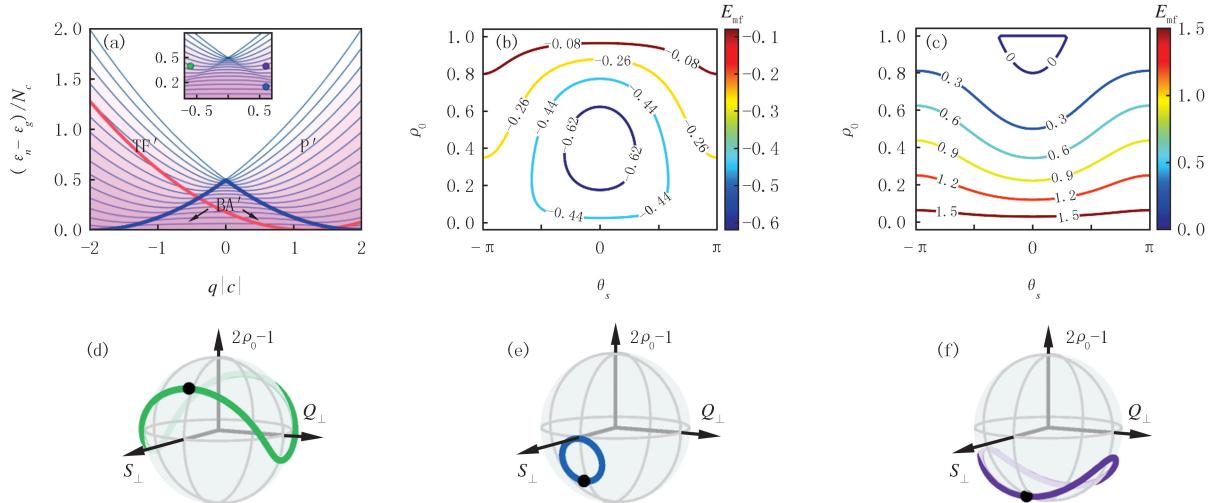


图2 自旋 $F=1$ 的零磁化铁磁BEC激发态量子相变图

Fig.2 Excited-state quantum phase transition of a ferromagnetic $F=1$ spinor BEC with zero magnetization

这里,使用平衡相变的重新标度的序参量作为 OTOC 算符, $\hat{W} = \hat{V} = \hat{N}_0/N$ 。因此, $[\hat{W}(0), \hat{V}(0)] = 0$, \hat{W} 和 \hat{V} 在时刻是对易的。选择自旋相干态 $|\zeta\rangle^{\otimes N}$ 和给定的 ρ_0 (假设 $\rho_{+1} = \rho_{-1}$) 作为系统的初始态

$$\zeta = (\zeta_{+1}, \zeta_0, \zeta_{-1})^T = \left(\sqrt{\frac{1-\rho_0}{2}} e^{i\phi_{+1}}, \sqrt{\rho_0} e^{i\phi_0}, \sqrt{\frac{1-\rho_0}{2}} e^{i\phi_{-1}} \right), \quad (8)$$

在 Fock 基 $|N_0, M\rangle$ 中,自旋相干态

$$|\zeta\rangle^{\otimes N} = \frac{1}{\sqrt{N!}} (\zeta_{+1} a_{+1}^\dagger + \zeta_0 a_0^\dagger + \zeta_{-1} a_{-1}^\dagger)^N |0\rangle. \quad (9)$$

上式可以用 Fock 基进行展开,即 $|\zeta\rangle^{\otimes N} = \sum_{N_0, M} f(N_0, M) |N_0, M\rangle$,系数

$$f(N_0, M) = \sqrt{\frac{N!}{N_+! N_0! N_-!}} \left(\sqrt{\frac{1-\rho_0}{2}} \right)^{N-N_0} (\sqrt{\rho_0})^{N_0} \times \exp[i(N_+ \phi_{+1} + N_0 \phi_0 + N_- \phi_{-1})]. \quad (10)$$

通过 $C(t)$, 旋量 BEC 系统的动力学性质被很好地揭示, $C(t)$ 的动力学特征如图 3(a-f) 所示。上侧一栏为 $q < 0$ 的情况,即: $q = -0.5|c|$ (a), $q = -0.4|c|$ (b) 和 $q = -0.3|c|$ (c), 而下侧一栏对应 $q > 0$ 的情况,即: $q =$

$1.5|c|(d)$, $q=1.6|c|(e)$ 和 $q=1.7|c|(f)$. 可以看到, OTOC 在相变点 ($q=-0.4|c|$ 和 $q=1.6|c|$, 对应红线) 经历了一个短时间的指数增长, 直到达到饱和值 [图 3(b,e)], 即 2.5×10^{-2} (左临界点) 和 7.5×10^{-5} (右临界点). 作为对比, 当 q 被调整为偏离 ESQPT 的位置处, 即 $q=-0.5|c|$ 和 $q=-0.3|c|$, $q=1.5|c|$ 和 $q=1.7|c|$, 分别对应图 3(a,c,d,f) 中的蓝线, 非临界相变点处 $C(t)$ 呈现阻尼振荡, 直到最终收敛. 这表明在 ESQPT 上的快速信息扰动没有相干回流.

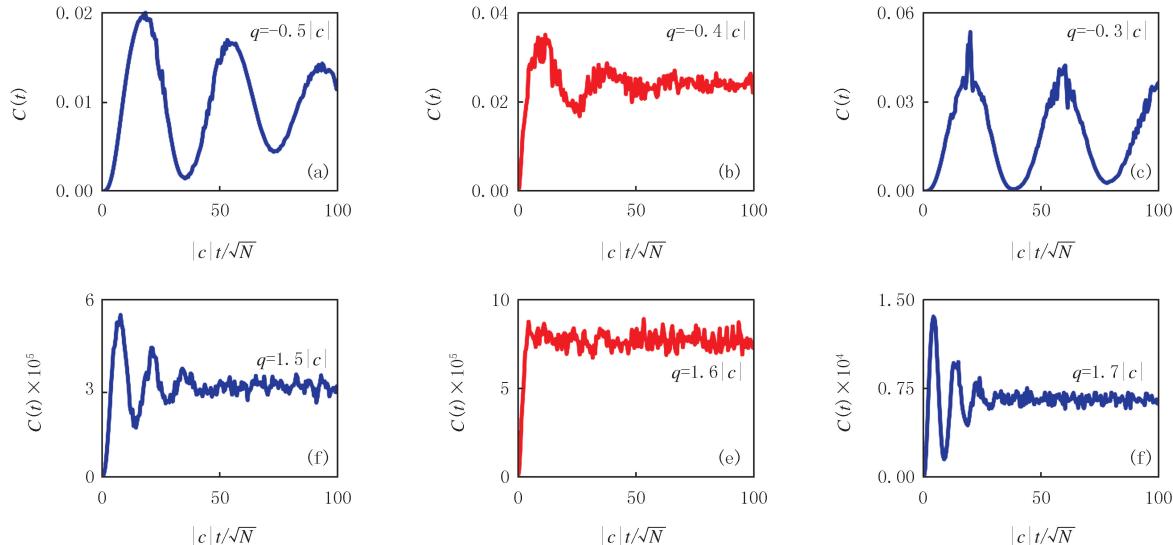


图3 铁磁旋量BEC中, 不同 q 值下OTOC随时间的演化

Fig. 3 Time evolution of OTOC for different values of q in a ferromagnetic $F=1$ spinor BEC

基于上述分析, ESQPT 的相变点可以通过式(6)来识别 OTOC 的动力学特征. 为了定量探测相变点, 需要引入另一个物理量来衡量相变. 事实上, 在图 3 中, 当时间 t 趋于无穷大时, 系统不同的参数 q 有不同的饱和值. 由于这些饱和值包含量子相位的特征, 因此对饱和值展开研究. 假设系统的波函数可以展开为 $|\hat{\Psi}(t)\rangle = \sum_n c_n \exp(-iE_n t) |\psi_n\rangle$, 其中 $|\psi_n\rangle$ 是哈密顿量的本征态, E_n 为本征值, 对于一个给定的初态 $|\hat{\Psi}_0\rangle$, 定义一个修正的初态 $|\hat{\Psi}'_0\rangle = \hat{W} |\hat{\Psi}_0\rangle$, 于是得到 $|\hat{\Psi}'(t)\rangle = \sum_m b_m \exp(-iE_m t) |\psi_m\rangle$. 当时间足够长趋于无穷时, OTOC 的平衡动力学只有当相位退相干时发生^[11], 在这种情况下, $F(t)$ 的饱和值

$$\mathcal{F} = F(t) \Big|_{t \rightarrow \infty} = \sum_{n,m,l,l'} c_n^* b_m \delta(E_n - E_m - E_l + E_{l'}) \times W^{nl} V^{ll'} W^{l'm}, \quad (11)$$

其中, $W^{mm} = \langle \psi_n | \hat{W} | \psi_m \rangle$. 等式(11)可以解释为捕捉本征态关联性的 3 点关联函数. 这是 OTOC 能为 ESQPT 提供有用信息的直接理论证据. 此外, $F(t)$ 的饱和值已被认为是 QPT 的表示.

在图 4 中, 根据式(11)绘制了初始自旋相干态为 $\rho_0=0.8$ 的饱和值 \mathcal{F} , 用红色实线表示, 图 4 中五角星分别表示 \mathcal{F} 的极大值和极小值, 相应的横坐标是临界值 q_c . 显然, 在此相干态下系统的 2 个相变点处, \mathcal{F} 变得不解析, 即 1 阶偏导数变得不连续. 换句话说, 饱和值 \mathcal{F} 的 1 阶偏导数不为 0. 这一特点为检测激发态相变点提供了定量依据. 这里原子数 N 越大, 饱和值计算精度越高, 但与之相对应的复杂性增加, 计算时间也就越长, 计算效率降低. 在不影响计算结果准确度的情况下, 选择 $N=300$ 作为总粒子数.

进一步研究 $\rho_0=0.2, 0.5, 0.7, 0.9$ 的不同初始状态下 \mathcal{F} 的行为, 如图 5(a)所示. 随着 ρ_0 的增加, 对应于非

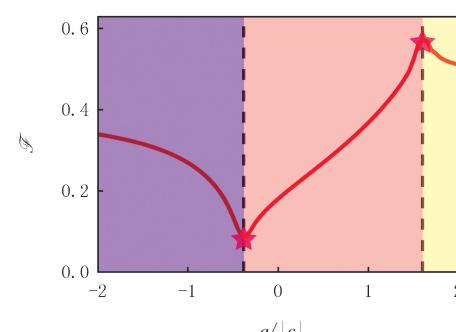


图4 OTOC的饱和值 \mathcal{F} 与序参数 $q/|c|$ 的关系

Fig. 4 The saturation value of OTOC \mathcal{F} as a function of $q/|c|$

解析点的OTOC饱和值 \mathcal{F} 的值也会增加。同时,当 $q/|c|=0$ 左侧的非解析点随着 ρ_0 的增加而向右移动, $q/|c|=0$ 右侧的非解析点也同时向右移动。为了验证这些不解析点和相变点是否一一对应,在 (q,ρ_0) 的相空间中绘制了相图,如图5(b)所示。为了更好地显示 \mathcal{F} 的等值线,对于右半部分($q>0$),将纵坐标 ρ_0 的值倒转。通过改变初始状态的 ρ_0 ,得到了由 \mathcal{F} 的所有非解析点组成的相变点,由蓝色虚线表示。可以看出,连接相变点的线和连接非解析点的线重叠得非常好。这一结果表明,OTOC确实可以作为ESQPT出现的判断依据。

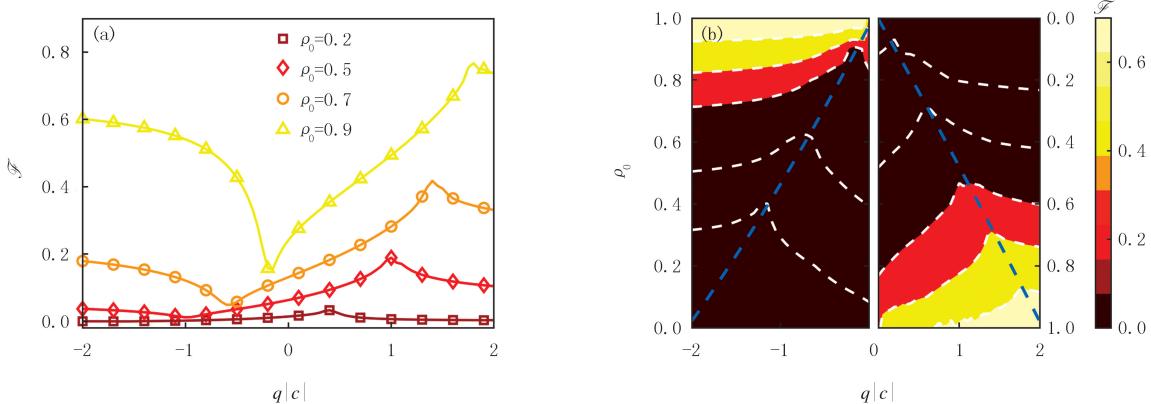


图5 铁磁旋量BEC中 \mathcal{F} 、 ρ_0 对 $q/|c|$ 的变化($F=1$)

Fig. 5 \mathcal{F} , ρ_0 versus $q/|c|$ in a ferromagnetic $F=1$ spinor BEC

4 非零磁化强度

当系统处于非零磁化强度的铁磁态时,相图和OTOC动力学显示出许多新的性质。图6给出了磁化强度为 $M/N=0.4$ 和 0.6 的激发态相图,这里 $N=300$, $\rho_0=0.8$ 。由于 M 在这种情况下不再是守恒量,相图开始显示出左右不对称的性质。随着磁化原子数 M 的增长,磁化强度 m 增加,相图左右部分之间的不对称性变得越来越明显。在左边部分,激发态能量和基态能量之间的差值要小于右边部分。

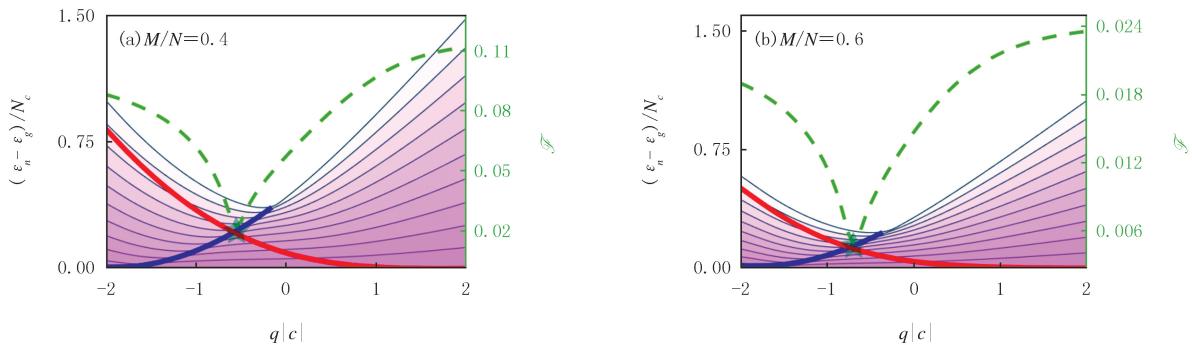


图6 非零磁化下铁磁旋量BEC的OTOC饱和值与ESQPT的关系图($F=1$)

Fig. 6 The relationship between OTOC saturation value and ESQPT under non-zero magnetization in a ferromagnetic $F=1$ spinor BEC

在非零磁化强度下,相变点也可以通过平均场能量线和ESQPT线的交点来确定。可以看出,在 $q>0$ 区域,2条曲线之间没有交点,表明系统在该区域没有临界相变。此外,随着 M/N 值的增加,临界相变点向右移动,即 $M/N=0.4$ 时,相变发生在 $q=-0.55|c|$ 处,而当 $M/N=0.6$ 时,相变点移动到 $q=-0.70|c|$ 处。

图6中的绿色虚线描绘了OTOC \mathcal{F} 和 q/c 的饱和度值之间的关系。与 $M=0$ 的情况相比,看到 $M\neq 0$ 的情况下 \mathcal{F} 的值小得多;随着 M 的增加, \mathcal{F} 会显著减少(当 $M=0$, \mathcal{F} 取值范围为 $[0,1]$;而对于 $M=0.4$ 和 0.6 , \mathcal{F} 分别在 $[0,0.120]$ 和 $[0,0.025]$ 的范围内。 $M=0$ 同样,在图6中,展示处 \mathcal{F} 的非解析点与相变点所对应的 $q/|c|$ 值完美重合,因此得出结论,即使在 $M\neq 0$ 情况下,OTOC也可以用于识别ESQPT。于是,在 (q,ρ_0) 参数空间中绘制了系统的相图,如图7所示。注意,相空间图 (q,ρ_0) 中色块条对应的 \mathcal{F} 值是不等间距的。

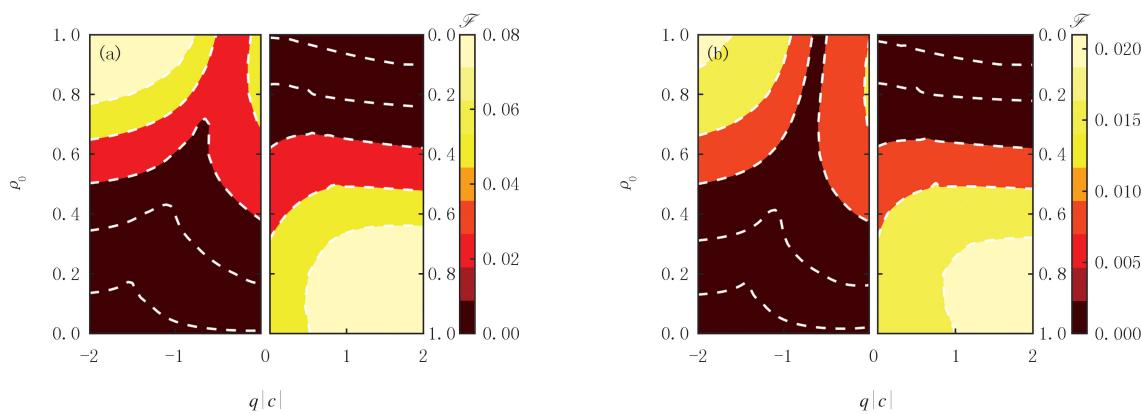


图7 对于非零磁化强度 $M/N=0.4$ (a) 和 0.6 (b), OTOC饱和值 \mathcal{F} 在相空间 (q, ρ_0) 中的等值线

Fig. 7 The saturation value of OTOC \mathcal{F} in the phase space (q, ρ_0) for nonzero magnetization $M/N=0.4$ (a) and 0.6 (b)

如图7所示,饱和值 \mathcal{F} 的值随着磁化强度 m 的增加而快速下降,这意味着系统的希尔伯特空间维数降低并影响着矩阵元素 \hat{N}_0 之间的波动。此外,在图7中,如果系统的初态 ρ_0 较大,OTOC 饱和值 \mathcal{F} 也具有较大的值,连接等 \mathcal{F} 线,在非零磁化的情况下,右边的相变点消失,而左边的相变点仍然存在。随着 m 的增加,左相变点左移,这表明磁化强度的存在对量子相变有重要影响。

5 总 结

本文扩展了 OTOC 的应用来研究外磁场中铁磁旋量 BEC 中的 ESQPT。首先使用量子方法和平均场理论确定 ESQPT 点。在这里,揭示了旋量凝聚体中的 ESQPT 可以用 OTOC 进行判断,在相变点,OTOC 经历了短时间的指数增长,OTOC 的饱和值表现出非解析行为。本文提出了使用全量子方法,平均场理论和数值模拟,确保了研究结果的可靠性。进一步研究表明,在不同的磁化条件下,OTOC 仍可以精确探测 ESQPT。虽然已经将重点放在了旋量凝聚体系统上,但这里介绍的探索 ESQPT 的方法可以应用于一大类少模量子系统,为 OTOC 在旋量凝聚体中的实验应用提供理论建议。最近在各种量子多体系统中实验测量了 OTOC^[13,20],工作表明 OTOC 可以用作 ESQPT 的有效探针。

参 考 文 献

- [1] CEJNAR P, MACEK M, HEINZE S, et al. Monodromy and excited-state quantum phase transitions in integrable systems: collective vibrations of nuclei[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 2006, 39(31): L515-L521.
- [2] Sachdev S. Quantum phase transitions of antiferromagnets and the cuprate superconductors[J]. Lect Notes Phys, 2010, 843: 1.
- [3] BRANDES T. Excited-state quantum phase transitions in Dicke superradiance models[J]. Physical Review E, Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics, 2013, 88(3): 032133.
- [4] ZAMANI S, JAFARI R, LANGARI A. Out-of-time-order correlations and Floquet dynamical quantum phase transition[J]. Physical Review B, 2022, 105(9): 094304.
- [5] SINDELKA M, SANTOS L F, MOISEYEV N. Excited-state quantum phase transitions studied from a non-Hermitian perspective[J]. Physical Review A, 2017, 95: 010103.
- [6] ZHOU L, KONG J, LAN Z H, et al. Dynamical quantum phase transitions in a spinor Bose-Einstein condensate and criticality enhanced quantum sensing[J]. Physical Review Research, 2023, 5: 013087.
- [7] DOLGITZER D, ZENG D B, CHEN Y S. Dynamical quantum phase transitions in the spin-boson model[J]. Optics Express, 2021, 29(15): 23988-23996.
- [8] WANG Q, PÉREZ-BERNAL F. Probing an excited-state quantum phase transition in a quantum many-body system via an out-of-time-order correlator[J]. Physical Review A, 2019, 100(6): 062113.
- [9] NIU Z X, WANG Q. Excited-state quantum phase transitions and Loschmidt-echo spectra in a spinor Bose-Einstein condensate[J]. Physical Review A, 2023, 107(3): 033307.
- [10] 秦璐, 冯雪景, 蒋亚静, 等. 超冷原子系统中电磁诱导透明的弱光矢量怪波[J]. 河南师范大学学报(自然科学版), 2022, 50(4): 1-7.

- QIN L,FENG X J,JIANG Y J,et al.Vector rogue waves in a cold atomic gas via electromagnetically induced transparency[J].Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition),2022,50(4):1-7.
- [11] DAĞ C B,WANG S-T,DUAN L M.Classification of quench-dynamical behaviors in spinor condensates[J].Physical Review A,2018,97(2):023603.
- [12] SWINGLE B.Unscrambling the physics of out-of-time-order correlators[J].Nature Physics,2018,14(10):988-990.
- [13] NIE X F,WEI B B,CHEN X,et al.Experimental observation of equilibrium and dynamical quantum phase transitions via out-of-time-ordered correlators[J].Physical Review Letters,2020,124(25):250601.
- [14] CHEN B,LI S,HOU X F,et al.Digital quantum simulation of Floquet topological phases with a solid-state quantum simulator[J].Photonics Research,2021,9(1):81.
- [15] GERBIER F,WIDERA A,FOLLING S,et al.Resonant control of spin dynamics in ultracold quantum gases by microwave dressing[J].Physical Review A,2006,73(4):041602(R).
- [16] ZHAO L,JIANG J,TANG T,et al.Dynamics in spinor condensates tuned by a microwave dressing field[J].Physical Review A,2014,89(2):023608.
- [17] 杨超楠,郑任菲,赵兴东,等. $F=1$ 旋量玻色-爱因斯坦凝聚的向列压缩[J].河南师范大学学报(自然科学版),2022,50(6):106-113.
YANG C N,ZHENG R F,ZHAO X D,et al.Nematic squeezing in the $F=1$ Bose-Einstein condensate[J].Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition),2022,50(6):106-113.
- [18] KOASHI M,UEDA M.Exact eigenstates and magnetic response of spin-1 and spin-2 Bose-Einstein condensates[J].Physical Review Letters,2000,84(6):1066-1069.
- [19] MURATA K,SAITO H,UEDA M.Broken-axisymmetry phase of a spin-1 ferromagnetic Bose-Einstein condensate[J].Physical Review A,2007,75:013607.
- [20] HEYL M,POLLMANN F,DÓRA B.Detecting equilibrium and dynamical quantum phase transitions in Ising chains via out-of-time-ordered correlators[J].Physical Review Letters,2018,121(1):016801.

Detecting excited-state quantum phase transition in a ferromagnetic spinor condensate by out-of-time-order correlator

Zhao Junjie¹, Wang Qi², Zhao Xingdong², Zhu Zunlue², Zhou Lu¹

(1. School of Physics and Electronic Science, East China Normal University, Shanghai 200241, China;

2. School of Physics, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)

Abstract: Out-of-time-order correlator (OTOC) is widely used in investigating quantum chaos, quantum information scrambling and dynamic quantum phase transition. We apply OTOC to detect the excited-quantum phase transition of $F=1$ spinor Bose-Einstein condensate in external magnetic field. By using full quantum method, mean field theory and numerical simulation, we investigate the quantum phase transition points of excited-state and the dynamic properties of the system around them, and prove that these characteristics can be detected by OTOC. Our further results show that the phase transition point can also be detected under different magnetization conditions. Our results provide theoretical proposals for using OTOC to detect the excited-quantum phase transition in spinor quantum gas and other quantum many-body systems experimentally.

Keywords: excited-state quantum phase transition; out-of-time-order correlator; spinor Bose-Einstein condensate; quantum sensing

[责任编辑 杨浦 刘洋]