

ENO 格式在计算一维激波管问题中的优化研究

刘 晓¹, 张肇弛¹, 胡伊琳²

(1. 河南师范大学 数学与信息科学学院, 河南 新乡 453007; 2. 华中师范大学 数学与统计学学院, 武汉 430079)

摘 要: ENO 格式在捕捉激波间断问题中需要计算 3 个模板多项式, 而这些模板多项式仅在间断附近有较大差别, 在其它较为平滑的位置差别很小. 针对这一特点, 对 ENO 格式进行优化, 达到既节约计算时间又不影响计算效果的目的. 之后, 以一维激波管问题为例, 在压强梯度大于预设临界值的位置用标准 ENO 格式计算, 而在平滑的位置上, 直接用预设模板多项式计算. 结果表明: 优化后的计算时间比原来减少 30%~50%. 此外, 预设模板多项式的选择依据格式的迎风性, 直接用标准 ENO 三模板的最左端或最右端模板作为最终结果.

关键词: ENO 格式; 一维激波管; Euler 方程; 格式优化; 压强梯度

中图分类号: O241.6

文献标志码: A

用数值方法模拟流体运动, 当流体运动越来越复杂时, 对差分格式精度和分辨率的要求也越来越高. 发展高精度、高分辨率差分格式也显得非常必要^[1-2]. 所谓分辨率是指当网格有限时, 数值格式的误差特性, 从物理意义上用可分辨波数的大小来衡量, 一般可分辨波数越高, 分辨率越高.

基于 TVD 思想^[3], Harten 于 1987 年提出了单元平均型 ENO(Essentially Non-Oscillatory, 基本无振荡)格式^[4]. 由于单元平均型算法需要将节点值与通过积分计算的平均值不断转化, 这不利于实际应用的推广. Shu 对其进行改进, 简化了 TVD 性质的 RK 时间差分格式, 并用通量型算法取代原来的单元平均型算法^[5].

在应用方面, Wang 等人用 RK 间断伽略金方法求解可压缩混合流问题^[6], 并验证一维 Sod 激波管问题数值解与精确解的误差阶为 10^{-3} , 这是一种基于 ENO 格式的有限元方法. 然而在单元内部, 有限元方法需要通过增加黏性项来抑制数值振荡, 而且激波捕捉比较困难. Cheng 等人用 Lagrangian 型 ENO 格式求解可压缩 Euler 气体方程, 在时间和空间上都能保证了至少二阶精度且基本无数值振荡^[7].

一维激波管问题, 即 Riemann 问题, 虽然简单, 但在测试算法的稳定性和分辨率方面具有独特优势, 其优势在于控制方程维数少、变量少, 能反映流动本质、便于计算. 激波管问题包含了膨胀波、激波及接触面间断之间的相互作用和相互关系, 而且有其解析解, 通过解析解与数值解的对比可以很好地判断所用数值算法精度与误差^[8].

一般的 ENO 格式在计算过程中不需要添加人工黏性项来抑制数值振荡就能很好地计算一维激波管问题. 但由于在模板选择和判断上需要用到大量条件, 对于大规模问题, 会花掉很多计算时间. 本文通过对 ENO 格式进行优化, 可以在保证计算精度的前提下, 节省差分格式的计算时间, 提高运算效率.

1 ENO 格式简介和优化

1.1 ENO 格式简介

ENO 差分格式的基本思路是重构方程的通量, 使其能够存放网格半点, 采用选择节点模板和各阶差商绝对值极小的原则, 构造数值通量, 同时实现高阶精度和抑制数值振荡^[9]. 下面简单介绍 ENO 格式的推导过程.

收稿日期: 2014-06-15; 修回日期: 2014-09-19.

基金项目: 国家自然科学基金(41374158); 河南省教育厅科学技术研究重点项目(13A110547).

作者简介: 刘 晓(1980-), 男, 河南邓州人, 河南师范大学副教授, 研究方向为计算数学、大气动力学, E-mail: xliu@spaceweather.ac.

对于非线性 Euler 方程:

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (1)$$

先考虑其空间上的差分,其半离散格式为:

$$\frac{\partial u_j(t)}{\partial t} + \frac{1}{\Delta x} [\hat{f}_{j+1/2} - \hat{f}_{j-1/2}] = 0. \quad (2)$$

对网格节点采用 Steger-Warming 流通矢量分裂法^[10],将流通矢量 $f(u)$ 分裂后的流通矢量 $f^\pm(u)$,求出在半点 $x_{j+1/2}$ 上求出数值通量解 $\hat{f}_{j+1/2}^+, \hat{f}_{j+1/2}^-, \hat{f}_{j-1/2}^+, \hat{f}_{j-1/2}^-$, 其中:

$$\hat{f}_{j+1/2}(u) = \hat{f}_{j+1/2}^+(u) + \hat{f}_{j+1/2}^-(u), \hat{f}_{j-1/2}(u) = \hat{f}_{j-1/2}^+(u) + \hat{f}_{j-1/2}^-(u). \quad (3)$$

用模板计算流通矢量. 以 $x_{j+1/2}$ 为例,考虑迎风性,将通量 $\hat{f}_{j+1/2}^+$ 的模板 S_k^+ 为:

$$S_0^+ = \{x_{j-2}, x_{j-1}, x_j\}, S_1^+ = \{x_{j-1}, x_j, x_{j+1}\}, S_2^+ = \{x_j, x_{j+1}, x_{j+2}\}.$$

由 Newton 插值方法,得到各模板的二次插值函数多项式 $q_0^+(x_{j+1/2}), q_1^+(x_{j+1/2}), q_2^+(x_{j+1/2})$,

$$q_0^+(x_{j+1/2}) = \frac{1}{3}f_{j-2}^+ - \frac{7}{6}f_{j-1}^+ + \frac{11}{6}f_j^+, q_1^+(x_{j+1/2}) = -\frac{1}{6}f_{j-1}^+ + \frac{5}{6}f_j^+ + \frac{1}{3}f_{j+1}^+,$$

$$q_2^+(x_{j+1/2}) = \frac{1}{3}f_j^+ + \frac{5}{6}f_{j+1}^+ - \frac{1}{6}f_{j+2}^+.$$

利用 Jiang^[11]提出的度量模板光滑度的函数 IS_k :

$$IS_k = \sum_{l=1}^{r-1} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \Delta x^{2l-1} \left[\frac{d^l q_k^+(x)}{dx^l} \right]^2 dx.$$

由上式计算在 k 个模板中 IS_k 的值,将 $q_k^+(x)$ ($k = 1, 2, 3$) 代入上式计算模板函数为 IS_0^+, IS_1^+, IS_2^+ . 由 $\hat{f}_{j+1/2}^+(u) = \min\{q_0^+, q_1^+, q_2^+, IS_0^+, IS_1^+, IS_2^+\}$ 确定最光滑的多项式 $q_k^+(x)$,之后,将 $q_k^+(x)$ 赋给数值通量 $\hat{f}_{j+1/2}^+(u)$ 即可.

同理,通量 $\hat{f}_{j+1/2}^-$ 的模板 S_k^- 为:

$$S_0^- = \{x_{j-1}, x_j, x_{j+1}\}, S_1^- = \{x_j, x_{j+1}, x_{j+2}\}, S_2^- = \{x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3}\}.$$

同上述方法,计算得到 $q_0^-, q_1^-, q_2^-, IS_0^-, IS_1^-, IS_2^-$, 其中:

$$q_0^-(x_{j+1/2}) = -\frac{1}{6}f_{j-1}^- + \frac{5}{6}f_j^- + \frac{1}{3}f_{j+1}^-, q_1^-(x_{j+1/2}) = \frac{1}{3}f_j^- + \frac{5}{6}f_{j+1}^- - \frac{1}{6}f_{j+2}^-,$$

$$q_2^-(x_{j+1/2}) = \frac{11}{6}f_{j+1}^- - \frac{7}{6}f_{j+2}^- + \frac{1}{3}f_{j+3}^-.$$

由 $\hat{f}_{j+1/2}^-(u) = \min\{q_0^-, q_1^-, q_2^-, IS_0^-, IS_1^-, IS_2^-\}$ 求得 $q_k^-(x)$,继而有 $\hat{f}_{j+1/2}^-(u) = q_k^-(x)$. 最后通过(3)式就可得到通量重构后的 $\hat{f}_{j+1/2}$ 和 $\hat{f}_{j-1/2}$.

Harten 已经从理论上证明:单元平均型 ENO 格式满足 TVD 条件,格式精度与模板中的网格点数有关^[4],并且通过数值试验进行验证与说明^[12]. 考虑到 ENO 格式中的 3 个多项式在光滑位置上数值几乎相同,仅在间断位置上有较大差别. 下一节将正对此特点对 ENO 格式进行优化.

1.2 ENO 格式优化

本优化方法针对 1.1 节所述的传统 ENO 格式所构造的,我们发现,传统方法需要对计算域中所有节点进行模板构造以及光滑函数的计算,这样会降低计算效率,因此,我们有必要从实际应用的角度来对传统的 ENO 格式进行优化.

观察传统 ENO 格式求解一维激波管问题数值试验图形^[12]可知,除间断位置外,相邻两点间各物理量的变化量不大. 考察位于间断点及不光滑点处的 3 个模板多项式,各模板多项式作差 $|q_0 - q_1|$, $|q_0 - q_2|$, $|q_1 - q_2|$ 的分布图如下,其中压强、密度、速度值设置为同一颜色且均为无量纲.

从图 1 中给出的模板函数之间的差别可知:模板多项式仅在区间 $(0, 5, 1, 5)$ 处的模板函数的差别较大. 因此,不必要对激波管所有的点进行 ENO 模板的建立与选择,仅在模板函数差别较大的区域进行 ENO 模板的建立,而在模板函数差别较小的区域用事先依据迎风特性选好的模板即可.

本文用压强梯度作为临界值进行讨论,对于一维问题,其计算公式为:

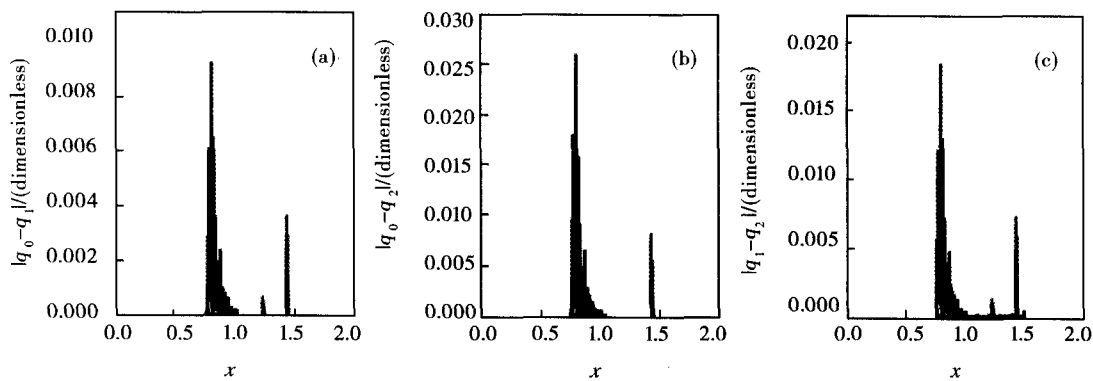


图1 模板函数 q_0, q_1 和 q_2 之间的差别 $|q_0 - q_1|, |q_0 - q_2|, |q_1 - q_2|$ 的分布

$$\nabla p_i = \left| \frac{p_{i+1} - p_i}{\Delta x} \right|,$$

为寻找激波管问题压强梯度的分布规律,绘制压强梯度值分布图,压强梯度值已无量纲化.

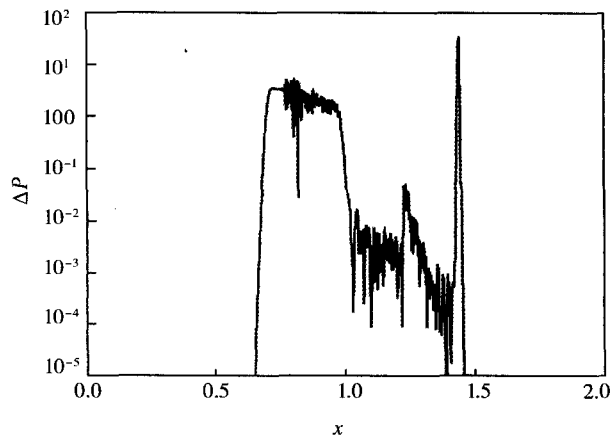


图2 一维激波管问题各点处压强梯度值分布

由图 2 可知,只有极少数点上的压强梯度值大于 10^{-2} . 可以考虑把其作为临界点进行讨论,从而对一维激波管问题的 ENO 方法进行优化改进. 具体做法如下:

对于 $f^+(x_{1/2})$, 当 $\nabla p_i < 10^{-2}$ 时: $f_{j+1/2}^+(u) = q_0^+(x_{j+1/2}) = \frac{1}{3}f_{j-2}^+ - \frac{7}{6}f_{j-1}^+ + \frac{11}{6}f_j^+$. 之所以另 $f_{j+1/2}^+(u)$ 等于 q_0^+ , 是因为考虑到 f^+ 的迎风性: 由于 f^+ 在整个区域内方向偏左, 选取最左端的模板能够更好地抑制计算产生的误差. 否则用标准 ENO 格式计算 $q_0^+, q_1^+, q_2^+, IS_0^+, IS_1^+, IS_2^+$, 继而求出 $\hat{f}_{j+1/2}^+(u) = \min\text{mod}(q_0^+, q_1^+, q_2^+, IS_0^+, IS_1^+, IS_2^+)$ 即可.

对于 $f^-(x_{1/2})$, 当 $\nabla p_i < 10^{-2}$ 时: $f_{j+1/2}^-(u) = q_2^-(x_{j+1/2}) = \frac{11}{6}f_{j+1}^- - \frac{7}{6}f_{j+2}^- + \frac{1}{3}f_{j+3}^-$. 否则用传统 ENO 格式计算.

选临界值依据的原则是确保压强梯度大于临界值的网格点尽量少. 虽然临界值取 10^{-1} 能保证更少的点满足条件, 但此时会产生非常明显的数值振荡, 故取临界值为 10^{-2} .

2 数值算例

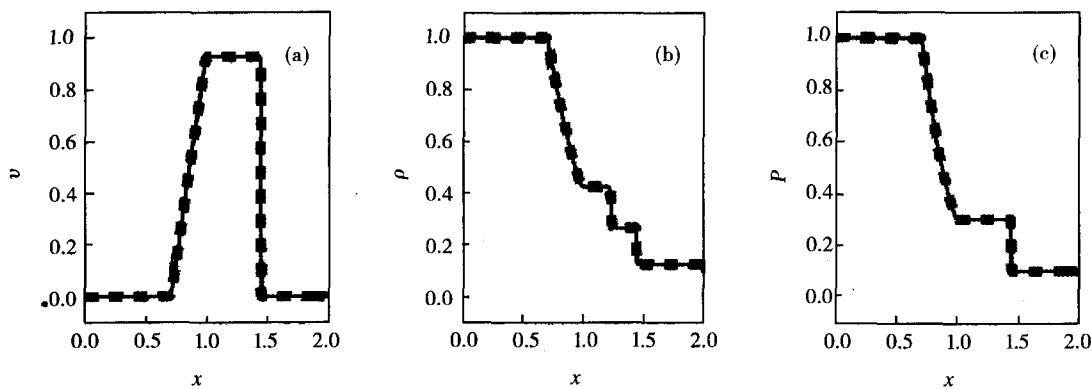
一维激波管问题使用无黏 Euler 方程: $\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0$, 其中: $U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix}, f = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (E + p)u \end{bmatrix}, E = (\gamma -$

1) $\left[E - \frac{1}{2}\rho u^2\right]$. 初值条件:计算区域为 $x = [0, 2], t = 0$ 时:
驱动段: $p_1 = 1.0, \rho_1 = 1.0, u_1 = 0, x \in [0, 1)$.
被驱动段: $p_2 = 0.1, \rho_2 = 0.125, u_2 = 0, x \in (1, 2]$.
边界条件: $x = 0$ 和 $x = 2$ 处为 $U_0 = U_1, U_{N+1} = U_N$. 其中 x 是计算区间的网格点位置分布,总时间为 $T = 0.25$ s. 时间差分格式上利用 3 阶 Runge-Kutta 法^[13], 计算 t_{n+1} 时刻位置的 u_i^{n+1} . 分别记录 100、200、400、800、1 600 个点优化前后的运行时间和节省时间百分比.

表 1 优化前后计算时间参数表

网格点数	优化前计算时间/s	优化后计算时间/s	节约时间率/%
100	0.062 50	0.031 25	50.00
200	0.140 62	0.078 12	44.45
400	0.265 62	0.140 63	47.56
800	1.390 62	0.860 63	38.11
1 600	5.437 50	3.625 00	33.33

观察表 1 知,随着网格点数的增加,节约时间的百分比会不断减小. 之所以出现这种情况,是因为节约的时间主要来自于减少了对光滑位置的计算,而我们根据激波演化的物理过程,用压强梯度来判断是否光滑. 整体上增加了网格点数时,在间断位置区域也有相应的增加(这部分计算量在优化前后不变). 而在光滑区域上的计算量将减小为原来的 2/3,但考虑到需要用到更多的判断,在光滑区域上减小的计算量将远小于原来的 2/3. 因此,光滑区域上的计算时间会随着网格点数的增加而增加,从而导致时间改进比率变小.
最终得到的 800 点的优化前和优化后的图形如图 3 所示,图 3 中物理量均为无量纲.



实线: 优化前的图形, 虚线: 优化后图形.

图3 ENO格式优化前与优化后速度(a)、密度(b)、压强(c)的图形

从图 3 我们可以看出:与优化前相比,优化后的 ENO 格式没有产生剧烈振荡.

3 结论

本文研究了一维激波管问题中 ENO 格式的优化,通过与优化前的数据和图形的比较,得出如下结论:
1) 优化后的格式可以很好地模拟一维激波管问题,计算效果与标准 ENO 格式一样,没有产生明显的数值振荡.
2) 对于一维激波管问题的 ENO 格式,优化后的总时间是原来的 30%~50%.
3) 用 $\nabla p = 10^{-2}$ 作为临界值进行判断,既能保持图形无较大振荡,又能使尽量少的网格点进行 ENO 模板选择,从而节约了计算时间.

参 考 文 献

[1] Berzins M. Data and range-bounded polynomials in ENO methods[J]. Journal of Computational Science, 2013, 4: 62-70.

- [2] 开依沙尔·热合曼, 努尔买买提·黑力力. 求解 Burgers 方程的高精度紧致 Pade' 逼近格式[J]. 河南师范大学学报: 自然科学版, 2014, 42(4): 6-12.
- [3] Anderson J. 计算流体力学入门[M]. 北京: 清华大学出版社, 2010: 376-377.
- [4] Harten A, Osher S. Some results on uniformly high-order accurate essentially nonoscillatory schemes[J]. Applied Numerical Mathematics, 1986, 2: 347-377.
- [5] Shu Chiwang, Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes[J]. Journal of Computational Physics, 1988, 77: 439-471.
- [6] Wang Chunwu, Shu Chiwang. An interface treating technique for compressible multi-medium flow with Runge-Kutta discontinuous Galerkin method[J]. Journal of Computational Physics, 2010, 229: 8823-8843.
- [7] Cheng Juan, Shu Chiwang. A high order ENO conservative Lagrangian type scheme for the compressible Euler equations[J]. Journal of Computational Physics, 2007, 227(2): 1567-1596.
- [8] 傅德薰, 马延文. 计算流体力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002: 100-106.
- [9] Rogerson A, Meiburg E. A numerical study of the convergence properties of ENO schemes [J]. Journal of Scientific Computing, 1990, 5: 151-167.
- [10] Steger J, Warming R. Flux Vector Splitting of the Inviscid Gasdynamic Equations with Application to Finite-Difference Methods[J]. Journal of Computational Physics, 1981, 40: 263-293.
- [11] Jiang Guangshan, Shu Chiwang. Efficient implementation of weight ENO schemes[J]. Journal of Computational Physics, 1996, 126: 202-228.
- [12] Harten A, Engquist B. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes III[J]. Journal of Computational Physics, 1997, 131: 31-47.
- [13] 张德良. 计算流体力学教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010: 176-177.

Investigate of Optimization in ENO Schemes on Computing One-dimensional Shock Tube Problem

LIU Xiao¹, ZHANG Zhaochi¹, HU Yilin²

(1. College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China;

2. School of Mathematics and Statistics, Central China Normal University, Wuhan 430079, China)

Abstract: Three stencil polymerizations are needed to capture discontinuous in shock problems by using the ENO scheme. However, they have dramatic differences just near the discontinuities. Based on this character, we optimize the ENO scheme in this paper so that we can reach the purposes of both saving the computing time and nearly having no-effect on the computing results. Based on this idea, we take one-dimensional shock tube as an example and compute the results with the standard ENO scheme where the pressure gradient is greater than the default critical value and with the preinstall polymerization at the smooth position. The results show that the computing time of the optimized schemes is shorter than the original schemes by 30%—50%. In addition, the preinstall polymerization at the leftmost or rightmost stencil is selected as the final result directly according to the upwind character.

Keywords: ENO schemes; one-dimensional shock tube; Euler equation; scheme optimization; pressure gradient