

# 广义不确定性原理下广义外势中 $n$ 维理想费米气体的热力学性质

李鹤龄, 王文伟, 任金秀

(宁夏大学 物理与电子电气工程学院; 宁夏沙漠信息智能感知重点实验室, 银川 750021)

**摘要:** 采用 Thomas-Fermi 的半经典近似, 研究了广义不确定性原理下广义外势中  $n$  维理想费米气体的热力学性质. 解析计算出平均粒子数、内能和热容等热力学量, 给出了低温条件下上述热力学量及化学势、费米能和基态能的解析表达式以及考虑广义不确定性原理的修正项; 在低温条件下, 数值分析了外势与广义不确定性原理对铜电子气体及电子密度更高的电子系统热力学性质的影响, 发现: 1) 考虑广义不确定性原理时, 外势对电子系统的影响很大, 使广义不确定性原理的修正项增加了 6~11 个数量级. 2) 粒子数密度越大、粒子质量越小, 广义不确定性原理的影响越大. 3) 广义不确定性原理导致内能随温度的增加先增大, 当温度升到某一数值时(对三维谐振势中的铜电子气体,  $T/T_0 \sim 0.22$ ) 时, 增值为 0, 温度再增加内能减少; 热容随温度的增加减少; 化学势、费米能和基态能随温度的升高而增大.

**关键词:** 广义不确定性原理; 费米气体; 热力学性质

**中图分类号:** O414.2

**文献标志码:** A

在经典力学中, 粒子的运动学变量服从泊松代数  $\{x_i, p_j\} = \delta_{ij}$ , 粒子的广义坐标和广义动量是相互对易的, 能够同时精确测量. 而在量子力学中, 广义坐标和广义动量成为对应的广义坐标算符和广义动量算符, 它们遵循海森堡代数  $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$ , 粒子的坐标和动量不能被同时精确测量, 遵循通常的量子力学中的不确定性原理  $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ . 通常在量子力学中不考虑引力, 忽略引力的影响, 但引力无处不在. 在引力的量子理论中, 量子力学中的海森堡代数被变形的海森堡代数所代替  $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar[1 + Ap^2]\delta_{ij}$ , 存在一个最小长度的限制, 使通常量子力学中的不确定性原理被修正为广义不确定性原理<sup>[1]</sup> (Generalized Uncertainty Principle, 简记为 GUP). 有很多证据(弦理论<sup>[2]</sup>、圈量子引力<sup>[3]</sup> 和黑洞物理<sup>[4]</sup>) 已经证实了广义不确定性原理. 统计热力学中, 因引力的影响很小, 通常也不考虑引力, 但引力的量子

理论得到的广义不确定性原理会使统计物理中的量子态密度被修正<sup>[5]</sup>, 会对物质的性质产生影响. 考虑广义不确定性原理的影响时, 统计物理中已研究过的一些问题的热力学性质都有不同程度的修正<sup>[6-12]</sup>, 如黑体辐射<sup>[5]</sup>、任意维空间的谐振子<sup>[6]</sup>、理想气体<sup>[13]</sup> (经典理想气体、极端相对论理想气体、理想费米子和玻色子气体). 通常认为广义不确定性原理只是高温、高能物理中使用的方法, 事实上也可用于低温性质的研究<sup>[14]</sup>.

外势场是束缚、研究量子气体的一个重要方法<sup>[15-17]</sup>, 通过改变外势的形状和强度, 可实现对量子系统各种行为的调控, 进而实现操控量子系统的低温相变, 外势约束会对量子系统的性质产生重要的影响. 有很多文献<sup>[18-19]</sup> 对弱外磁场、强外磁场等费米气体的热力学性质做了研究.

本文主要研究广义不确定性原理下广义外势中费米气体的热力学性质, 解析计算了平均粒子数、总能、化学势和热容等热力学量, 探讨了外势、广义不确定性原理对费米系统热力学性质的影响, 数值分析低温条

收稿日期: 2017-02-15; 修回日期: 2017-03-22.

基金项目: 国家自然科学基金(61167002); 宁夏自然科学基金(NZ14055).

作者简介(通信作者): 李鹤龄(1960-), 男, 河北沧州人, 宁夏大学教授, 硕士研究生导师, 研究方向为平衡态及非平衡态统计物理, E-mail: 13995100981@163.com.

件下外势、电子数密度对热力学性质的影响程度. 文中给出的定量结果, 对相关实验与理论研究有指导意义.

## 1 广义不确定性原理下广义外势中费米气体的热力学函数

外势中单粒子能量

$$\epsilon(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \frac{p^2}{2m} + \sum_{i=1}^n \epsilon_i \left| \frac{x_i}{L_i} \right|^{t_i}, \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  和  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  分别为  $n$  维空间粒子的动量和坐标,  $m$  为粒子的静止质量,  $t_i, \epsilon_i$  和  $L_i$  均为描述外势场形状和强度的常数.

当系统的粒子数较大, 并且粒子在外势中的势能小于粒子的动能时, 可用 Thomas-Fermi 半经典近似的方法<sup>[20]</sup>. 这样系统的巨配分函数的对数可由如下的积分计算

$$\ln \Xi = \frac{g}{h^n} \int \ln[1 + e^{-\beta(\epsilon - \mu)}] d^n p d^n x, \quad (2)$$

其中,  $h$  是普朗克常数,  $g$  是自旋简并度,  $\beta = 1/(k_B T)$  是统计温度,  $\mu$  是化学势,  $k_B$  是玻尔兹曼常数,  $T$  是绝对温度,  $d^n p = dp_1 dp_2 \dots dp_n$ ,  $d^n x = dx_1 dx_2 \dots dx_n$ .

由文献[1]知坐标的不确定性  $\Delta x$  和动量的不确定性  $\Delta p$  满足广义不确定性原理, 最简单的广义不确定性关系为

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} (1 + A(\Delta p)^2), \quad (3)$$

其中, 最小长度  $\Delta x_{\min} = \hbar \sqrt{A}$ , 约化普朗克常数  $\hbar = h/(2\pi)$ . 由(3)式可得位置存在一个非零的最小长度限制. 考虑到广义不确定性原理时, 态密度要有一修正因子<sup>[5-6]</sup>:  $(1 + Ap^2)^{-n}$  按动量  $p$  展开

$$(1 + Ap^2)^{-n} = 1 - nAp^2 + \frac{n(n+1)}{2!} (Ap^2)^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} (Ap^2)^3 - \dots \quad (4)$$

巨配分函数的对数修正为

$$\ln \Xi = \frac{g}{h^n} \int \frac{\ln(1 + e^{-\beta(\epsilon - \mu)})}{(1 + Ap^2)^n} d^n p d^n x, \quad (5)$$

利用球面坐标  $C_n = \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!}$ ,  $d^n R = nC_n R^{n-1} dR$ , 积分得系统的巨配分函数

$$\ln \Xi = \frac{gV_n^*}{\lambda^n} (f_{\eta+1}(z_r) - n^2 f_{\eta+2}(z_r) mA k_B T + \frac{n^2(n+1)(n+2)}{2} f_{\eta+3}(z_r) (mA k_B T)^2 - \dots), \quad (6)$$

其中,  $V_n^* = \prod_{i=1}^n \frac{2L_i}{(\beta \epsilon_i)^{1/t_i}} \Gamma(\frac{1}{t_i} + 1)$ ,  $\eta = x + \frac{n}{2}$ ,  $x = \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i}$ , 热波长  $\lambda = \sqrt{\frac{h^2}{2\pi m k_B T}}$ , 系统的逸度  $z_r = e^{\beta\mu}$ , 费米积分<sup>[21]</sup>

$$f_i(z) = \frac{1}{\Gamma(i)} \int_0^\infty \frac{t^{i-1} dt}{z^{-1} e^t + 1} \xrightarrow{x \leq 1} \sum_{i=1}^\infty (-1)^{i-1} \frac{z^i}{i^i}. \quad (7)$$

由巨配分函数(6)式, 可得巨热力学势

$$\Omega = -k_B T \ln \Xi = -\frac{gV_n^*}{\lambda^n} k_B T (f_{\eta+1}(z_r) - n^2 f_{\eta+2}(z_r) mA k_B T + \frac{n^2(n+1)(n+2)}{2} f_{\eta+3}(z_r) (mA k_B T)^2 - \dots). \quad (8)$$

利用量子统计中的热力学基本公式, 得系统的平均粒子数为

$$N = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = \frac{gV_n^*}{\lambda^n} (f_\eta(z_r) - n^2 f_{\eta+1}(z_r) mA k_B T + \frac{n^2(n+1)(n+2)}{2} f_{\eta+2}(z_r) (mA k_B T)^2 - \dots). \quad (9)$$

利用(6)式和(9)式, 可得系统的内能

$$U = -\frac{\partial \ln \Xi}{\partial \beta} =$$

$$\begin{aligned} & \eta N k_B T \left( f_{\eta+1}(z_r) - n^2 \frac{\eta+1}{\eta} f_{\eta+2}(z_r) m A k_B T + \frac{(\eta+2)n^2(n+1)(n+2)}{2\eta} f_{\eta+3}(z_r) (m A k_B T)^2 - \dots \right) \times \\ & \left( f_{\eta}(z_r) - n^2 f_{\eta+1}(z_r) m A k_B T + \frac{n^2(n+1)(n+2)}{2} f_{\eta+2}(z_r) (m A k_B T)^2 - \dots \right)^{-1} \approx \\ & \eta N k_B T \frac{f_{\eta+1}(z_r)}{f_{\eta}(z_r)} \left( 1 + \left( n^2 \frac{f_{\eta+1}(z_r)}{f_{\eta}(z_r)} - \frac{n^2(\eta+1)}{\eta} \frac{f_{\eta+2}(z_r)}{f_{\eta+1}(z_r)} \right) m A k_B T + \left( n^4 \frac{f_{\eta+1}^2(z_r)}{f_{\eta}^2(z_r)} - \right. \right. \\ & \left. \left. \left( \frac{n^2(n+1)(n+2)}{2} + \frac{n^4(\eta+1)}{\eta} \right) \frac{f_{\eta+2}(z_r)}{f_{\eta}(z_r)} + \frac{n^2(n+1)(n+2)(\eta+2)}{2\eta} \frac{f_{\eta+3}(z_r)}{f_{\eta+1}(z_r)} \right) (m A k_B T)^2 \right). \quad (10) \end{aligned}$$

(10)式对温度求导可得热容

$$\begin{aligned} C = & \eta N k_B \left( (\eta+1) \frac{f_{\eta+1}(z_r)}{f_{\eta}(z_r)} - \eta \frac{f_{\eta}(z_r)}{f_{\eta-1}(z_r)} + m A k_B T \left( \frac{f_{\eta+1}(z_r)}{f_{\eta-1}(z_r)} n^2(\eta+2) + n^2(\eta+1) \frac{f_{\eta+1}^2(z_r)}{f_{\eta}^2(z_r)} - n^2 \eta \frac{f_{\eta}^2(z_r)}{f_{\eta-1}^2(z_r)} - \right. \right. \\ & \left. \left. n^2 \frac{(\eta+1)(\eta+2)}{\eta} \frac{f_{\eta+2}(z_r)}{f_{\eta}(z_r)} \right) + (m A k_B T)^2 \left( \left( -\frac{(\eta+2)\eta+2}{2\eta} n^2(n+1)(n+2) + \frac{n^4(\eta+2)-\eta^2}{\eta} \right) \frac{f_{\eta+2}(z_r)}{f_{\eta-1}(z_r)} + \right. \right. \\ & \left. \left. \left( n^4(\eta+2) + \eta \frac{n^2(n+1)(n+2)}{2} \right) \frac{f_{\eta+1}(z_r) f_{\eta}(z_r)}{f_{\eta-1}^2(z_r)} + \frac{3}{2} n^2(n+1)(n+2)(\eta+2) \frac{f_{\eta+3}(z_r)}{f_{\eta}(z_r)} - n^4 \eta \frac{f_{\eta}^3(z_r)}{f_{\eta-1}^3(z_r)} + \right. \right. \\ & \left. \left. n^4(\eta+1) \frac{f_{\eta+1}^3(z_r)}{f_{\eta}^3(z_r)} + \left( \frac{n^2(n+1)(n+2)\eta - n^4(\eta+1)(\eta+2)}{2} \right) \frac{f_{\eta+2}(z_r) f_{\eta+1}(z_r)}{f_{\eta}^2(z_r)} + \right. \right. \\ & \left. \left. \left( n^4(3\eta-2) - \frac{5}{2} n^2(n+1)(n+2)\eta + n^4 \frac{(\eta+1)(\eta-1)}{\eta} \right) \frac{f_{\eta+1}^2(z_r)}{f_{\eta}(z_r) f_{\eta-1}(z_r)} \right) \right). \quad (11) \end{aligned}$$

## 2 低温极限下的热力学函数

根据 Sommerfeld 引理<sup>[21]</sup>, 费米函数在低温情况下可以表示成

$$f_l(z) = \frac{(\ln z)^l}{\Gamma(l+1)} \left( 1 + l(l-1) \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{(\ln z)^2} + l(l-1)(l-2)(l-3) \frac{7\pi^4}{360} \frac{1}{(\ln z)^4} + \dots \right), \quad (12)$$

$T \rightarrow 0$  时,

$$f_l(z) \approx \frac{(\ln z)^l}{\Gamma(l+1)}. \quad (13)$$

将(13)式代入(9)式, 得粒子数

$$n = \frac{g V_n (2\pi m)^{n/2} \mu^\eta}{h^n \Gamma(\eta+1)} \left( 1 - \frac{n^2 \rho m A}{\eta+1} + \frac{n^2(n+1)(n+2)(\rho m A)^2}{2(\eta+1)(\eta+2)} - \dots \right). \quad (14)$$

由(14)式得费米能

$$E_F \approx E_{F_0} \left( 1 + \frac{n^2 m A E_{F_0}}{\eta(\eta+1)} - \frac{n^2(n+1)(n+2)(m A E_{F_0})^2}{2\eta(\eta+1)(\eta+2)} + \dots \right). \quad (15)$$

若取  $A = 0$ , 则  $E_F = E_{F_0}$ , 为不考虑 GUP 时广义外势中费米气体的费米能,

$$E_{F_0} = \left( \frac{N h^n \Gamma(\eta+1)}{g V_n (2\pi m)^{n/2}} \right)^{1/\eta}, V_n = \prod_{i=1}^n \frac{2L_i}{\epsilon_i} \Gamma\left(\frac{1}{t_i} + 1\right). \quad (16)$$

在  $m A E_{F_0}$  为小量时, 将(12)式代入(9)式可得考虑 GUP 时低温条件下广义外势中费米气体的化学势

$$\mu \approx E_{F_0} \left( 1 + \frac{n^2 m A E_{F_0}}{\eta(\eta+1)} + \frac{\pi^2}{6} (m A n^2 E_{F_0} - (\eta-1)) \left( \frac{T}{T_{F_0}} \right)^2 + \dots \right), \quad (17)$$

其中,  $T_{F_0} = E_{F_0}/k_B$ . 将(12)式代入(10)式并由(17)式, 得到低温条件下广义外势中费米气体的内能(只取到  $m A E_{F_0}$  和  $T/T_{F_0}$  的平方项)

$$\begin{aligned} U = & \frac{\eta}{\eta+1} N E_{F_0} \left( 1 + \frac{n^2}{\eta(\eta+2)} m A E_{F_0} + \left( \frac{-n^4}{\eta^2(\eta+2)^2} + \frac{n^2(n+1)(n+2)}{\eta(\eta+1)(\eta+2)(\eta+3)} \right) (m A E_{F_0})^2 + \right. \\ & \left. \pi^2 \left( \frac{\eta+1}{6} - \frac{n^2((\eta-1)^2\eta+2(\eta+2))}{3\eta(\eta+1)(\eta+2)} m A E_{F_0} + \left( \frac{-n^4(\eta(n+4)+1)}{6\eta^2(\eta+1)^2(\eta+2)} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \frac{n^2(\eta-1)(2n^2-(3n+2)(\eta+1))}{2\eta(\eta+1)^2(\eta+2)(\eta+3)} \right) (m A E_{F_0})^2 \right) \left( \frac{T}{T_{F_0}} \right)^2 \right). \quad (18) \end{aligned}$$

(18)式对温度  $T$  求导,得热容

$$C = \frac{n+3}{\eta+1} Nk_B \pi^2 \left( \frac{\eta+1}{6} - \frac{n^2((\eta-1)^2\eta+2(\eta+2))}{3\eta(\eta+1)(\eta+2)} mAE_{F_0} + \left( \frac{(\eta-1)(2n^4 - (\eta+1)(3n^3+2n^2))}{2\eta(\eta+1)^2(\eta+2)(\eta+3)} - \frac{n^4(\eta(n+4)+1)}{6\eta^2(\eta+1)^2(\eta+2)} \right) (mAE_{F_0})^2 \right) \frac{T}{T_{F_0}}. \quad (19)$$

当  $T=0$  K 时,由(18)式得基态能

$$U_0 = \frac{\eta}{\eta+1} NE_{F_0} \left( 1 + \frac{n^2}{\eta(\eta+2)} mAE_{F_0} + \left( \frac{-n^4}{\eta^2(\eta+1)^2} + \frac{n^2(n+1)(n+2)}{\eta(\eta+1)(\eta+2)(\eta+3)} \right) (mAE_{F_0})^2 \right). \quad (20)$$

从上述表达式发现:GUP 的修正主要由  $mAE_{F_0}$  的级数来体现,只有在  $mAE_{F_0}$  较小时,本文的级数展开方法才有意义,因而  $mAE_{F_0}$  的数量级起到至关重要的作用。以下通过具体电子费米气体  $mAE_{F_0}$  的数值来分析讨论。在 GUP 中  $A$  是一个修正量,在本文的计算中将  $A$  作为小量处理,有文献[23-24]给出的最小长度  $\Delta x_{\min}$  为范围  $10^{-17} \sim 10^{-16}$  m,取  $\Delta x_{\min} = 10^{-16}$  m。由  $\Delta x_{\min} = \hbar \sqrt{A}$ ,知  $A$  可取到  $10^{36} \text{ m}^2 \cdot (\text{J} \cdot \text{s})^{-2}$ 。以铜电子气体为例,电子的质量  $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$  kg,铜电子数密度  $n_e = N/V = 8.5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$ 。在同样的  $\epsilon_i = 1$  和  $L_i$  的条件下,表 1 中列出了三维空间中不同外势中的铜电子的费米能以及 GUP 的修正项  $mAE_{F_0}$  的数量级。表 1 显示:随着  $x$  的增大,费米能  $E_{F_0}$  和 GUP 的修正项  $mAE_{F_0}$  都增大,在  $x=2$  时,  $E_{F_0} = 3.7818 \times 10^{-8}$  J,  $mAE_{F_0} \sim 10^{-2} < 1$ ,此时 GUP 的修正与其他外势相比大很多,但当  $x=3$  时,  $mAE_{F_0} = 2.3564 \times 10^{-6}$  J,  $mAE_{F_0} \sim 2 > 1$ ,  $mAE_{F_0}$  已不是小量,此时应尝试其他方法研究。本文中 GUP 的影响只以  $t_1 = t_2 = t_3 = 2, x = 3/2$  这种常见的三维谐振势为例具体讨论。

当  $x = 3/2$  时,  $\eta = 3$ 。将  $\eta = 3$  代入(17)~(20)式得到考虑 GUP 时三维谐振势中费米气体低温极限下化学势、内能和热容的表达式

$$\mu \approx E_{F_0} \left( 1 + \frac{3}{4} mAE_{F_0} - \pi^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{3}{2} mAE_{F_0} \right) \left( \frac{k_B T}{E_{F_0}} \right)^2 + \dots \right), \quad (21)$$

$$U = \frac{3}{4} NE_{F_0} \left( 1 + \frac{3}{5} mAE_{F_0} - \frac{1}{16} (mAE_{F_0})^2 + \pi^2 \left( \frac{2}{3} - \frac{11}{10} mAE_{F_0} - \frac{23}{40} (mAE_{F_0})^2 \right) \left( \frac{T}{T_{F_0}} \right)^2 \right), \quad (22)$$

$$C = \frac{3}{2} Nk_B \pi \left( \frac{2}{3} - \frac{11}{10} mAE_{F_0} - \frac{23}{40} (mAE_{F_0})^2 \right) \frac{T}{T_{F_0}}, \quad (23)$$

$$U_0 = \frac{3}{4} NE_{F_0} \left( 1 + \frac{3}{5} mAE_{F_0} - \frac{1}{16} (mAE_{F_0})^2 \right). \quad (24)$$

表 1 不同外势中费米气体的费米能

$l_i$ ( $i = 1, 2, 3$ )	$x = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{l_i}$	$V_3 = \prod_{i=1}^3 2L_i \Gamma\left(\frac{1}{l_i} + 1\right)$ ( $V = \prod_{i=1}^3 2L_i$ )	$E_{F_0} = \left[ \frac{Nh^2 \Gamma\left(\frac{n}{2} + x + 1\right)}{2V_n (2\pi m)^{\frac{n}{2}}} \right]^{\frac{1}{\frac{2}{2}+x}}$	铜电子气体	
				费米能 $E_{F_0}/\text{J}$	修正项 $mAE_{F_0}$ 的数量级
$l_1 = l_2 = l_3 \rightarrow \infty$	0	$V$	$\left( \frac{3Nh^3 \sqrt{\pi}}{8V(2\pi m)^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{2}{3}}$	$1.13 \times 10^{-18}$	$10^{-12}$
$l_1 = l_2 = l_3 = 4$	3/4	$\Gamma(5/4)^3 V$	$\left( \frac{Nh^3 \Gamma\left(\frac{13}{4}\right)}{2\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)^3 V(2\pi m)^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{4}{9}}$	$1.65 \times 10^{-12}$	$10^{-6}$
$l_1 = l_2 = l_3 = 2$	3/2	$\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{8} V$	$\left( \frac{24Nh^3}{\pi^{\frac{3}{2}} V(2\pi m)^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{1}{3}}$	$1.983 \times 10^{-9}$	$10^{-3}$
$l_1 = l_2 = 1, l_3 \rightarrow +\infty$	2	$V$	$\left( \frac{105Nh^3 \sqrt{\pi}}{32V(2\pi m)^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{2}{7}}$	$3.7818 \times 10^{-8}$	$10^{-2}$
$l_1 = l_2 = l_3 = 1$	3	$V$	$\left( \frac{945Nh^3 \sqrt{\pi}}{64V(2\pi m)^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{2}{9}}$	$2.3564 \times 10^{-6}$	1

若取  $A=0$ ,则(21)~(23)式回到不考虑 GUP 时三维谐振势中费米气体低温极限下化学势、内能和热容的表达式

$$\mu = E_{F_0} \left( 1 - \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{T}{T_{F_0}} \right)^2 \right), \quad (25)$$

$$U = \frac{3}{4}NE_{F_0} \left(1 + \frac{2\pi^2}{3} \left(\frac{T}{T_{F_0}}\right)^2\right), \quad (26)$$

$$C = Nk_B\pi^2 \frac{T}{T_{F_0}}, \quad (27)$$

$$U_0 = \frac{3}{4}NE_{F_0}. \quad (28)$$

将(21)~(24)式分别与(25)~(28)式中的对应项相减,得到 GUP 对三维谐振势中费米气体低温极限时化学势、内能、热容和基态能的修正

$$\Delta\mu = E_{F_0} \left(\frac{3}{4} + \frac{3\pi^2}{2} \left(\frac{T}{T_{F_0}}\right)^2\right) mAE_{F_0}, \quad (29)$$

$$\Delta U = \frac{3}{4}NE_{F_0} \left(\frac{3}{5}mAE_{F_0} - \frac{1}{16}(mAE_{F_0})^2 + \pi^2 \left(-\frac{11}{10}mAE_{F_0} - \frac{23}{40}(mAE_{F_0})^2\right) \left(\frac{T}{T_{F_0}}\right)^2\right), \quad (30)$$

$$\Delta C = \frac{3}{2}Nk_B\pi^2 \left(-\frac{11}{10}mAE_{F_0} - \frac{23}{40}(mAE_{F_0})^2\right) \frac{T}{T_{F_0}}, \quad (31)$$

$$\Delta U_0 = \frac{3}{4}NE_{F_0} \left(\frac{3}{5}mAE_{F_0} - \frac{1}{16}(mAE_{F_0})^2\right). \quad (32)$$

### 3 结果与讨论

#### 3.1 数值分析与比较

注意到表1中当外势  $t_1 = t_2 = t_3 \rightarrow \infty$  时,就为自由系统,自由铜电子的费米能  $E_{F_0} = 1.13 \times 10^{-18}$  J,  $mAE_{F_0} \sim 10^{-12}$ . 此数值极小,因而 GUP 对自由铜电子气体的影响可以忽略不计. 当外势  $t_1 = t_2 = t_3 = 2$  时,为三维谐振势系统,三维谐振势中铜电子的费米能  $E_{F_0} = 1.983 \times 10^{-9}$  J,它比自由铜电子的费米能大了9个数量级,虽然此时  $mAE_{F_0} \sim 10^{-3}$ ,仍然很小,但显然 GUP 对三维谐振势中的铜电子气体的影响要比自由费米气体大. 当外势  $t_1 = t_2 = 1, t_3 \rightarrow \infty$  时为锥形势系统,锥形势中铜电子的费米能  $E_{F_0} = 3.7818 \times 10^{-8}$  J,  $mAE_{F_0} \sim 10^{-2}$ ,此时 GUP 对锥形势中的铜电子气体的影响要比谐振势还要大,可见 GUP 的影响与外势密切相关.

对于自由铜电子费米气体,费米能  $E_{F_0}$  正比于粒子数密度  $n_e^{3/2}$ ,当  $n_e = 8.5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$  时,  $mAE_{F_0} \sim 10^{-12}$ ;当  $n_e = 10^{46} \text{ m}^{-3}$  时,  $mAE_{F_0} \sim 1$ . 对于三维谐振势中的铜电子费米气体,费米能  $E_{F_0}$  正比于粒子数密度  $n_e^{1/3}$ ,当  $n_e = 8.5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$  时,  $mAE_{F_0} \sim 10^{-12}$ ;当  $n_e = 10^{37} \text{ m}^{-3}$  时,  $mAE_{F_0} \sim 1$ . 由此可见,当粒子数密度增大时,广义不确定性原理对自由铜电子和三维谐振势中的铜电子费米气体也会有很大的修正. 再注意到:电子费米气体并不限于铜电子气体,电子密度可以很大. 文献[25]认为:裸电子的限度约为  $10^{-22} \text{ m}$ ,则一个电子的空间体积约为  $10^{-66} \text{ m}^3$ ,电子的最大粒子数密度可为  $10^{66} \text{ m}^{-3}$ . 设一个电子占有  $10^9$  个电子的空间体积,即电子平均间距为  $10^3$  个电子的限度(这正是通常的由分子、原子构成的理想气体的粒子间距),电子气为“稀薄”气体,其电子密度约为  $10^{57} \text{ m}^{-3}$ ,因而电子密度只要小于  $10^{57} \text{ m}^{-3}$ ,可看成理想费米气体.

图1显示了在低温条件下,考虑 GUP 与不考虑 GUP 两种情形下三维谐振势中铜电子费米气体( $n_e = 8.5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$ )化学势、内能和热容随温度的变化关系曲线. 由图1看出:在低温条件下,对于三维谐振势中的铜电子气体, GUP 对化学势、内能和热容的相对修正在  $10^{-3}$  (自由铜电子气体相对修正  $\sim 10^{-12}$ ),可见三维谐振外势的影响很大(差9个数量级左右). 化学势的修正随温度的增加按温度的二次方规律增加;内能随温度的增加先增大,温度升到  $t_c = T/T_{F_0} \sim 0.22$  时,增值为0,温度再增加内能按温度的二次方规律减少;热容减少,热容修正值的绝对值随温度的升高而按温度的一次方规律增加. (GUP 对其他外势情况下的修正与图1类似,只是相对修正的数量级有所不同,故省略)

#### 3.2 结果分析

理想费米气体是实际费米系统的抽象,实际费米粒子之间是存在弱相互作用的. 但考虑弱相互作用时的理论结果(如:赝势法)只是将系统化学势和能量整体“平移”<sup>[14,18]</sup>,与温度无关,热容不变,也即忽略相互作用时与考虑弱相互作用时的费米气体的理论结果无本质变化. 而外势具有调控粒子之间的相互作用的功能,

外势改变了粒子间相互关联,从而影响了费米气体性质.

外势的约束使粒子几乎都集中分布于外势中心附近,不仅使粒子间的相互作用加强,也使粒子数密度增大,这都使得费米能 $E_{F0}$ 增大(增大了6~10个数量级).GUP的修正主要由 $mAE_{F0}$ 的级数来体现,外势使费米能显著增大.故考虑GUP的修正时,具有外势时影响巨大.

费米子遵守泡利不相容原理,当考虑GUP时还有“最小长度”的限制,增加的限制使每个能级中的量子态数减小,粒子填充完低能态之后,驱使粒子向高能态分布,致使基态能、费米能和内能增加.而随着温度的升高,粒子能量增加,填充高能态的粒子也增多,将要填充的高能态的态密度远比低能态减少得快,且能量越高量子态数减少的越多,则高能态粒子可填充的量子态数越来越少.在温差相同的条件下,考虑GUP比不考虑GUP时的高能态粒子可占据的量子态数少得多,使得跃迁到高能态的粒子减少,内能增加减缓直到减小,导致热容也减少.

## 4 结 论

本文显示:常用在高温、高能量的广义不确定性原理(GUP)对传统费米子系统热力学性质的修正,即便在低温条件下,对于高密度、小质量的系统也是应该考虑的.但对于通常金属中的电子气体,如:自由铜电子气体,在低温条件下( $T/T_{F0}$ 在 $0\sim 0.5$ ),不必考虑GUP的影响.GUP对化学势、内能和热容的修正随费米子数密度的增大而增大,随费米子质量减小而增大,外势的影响非常巨大(对铜电子气体,谐振外势的加入使此修正增加了9个数量级).这都源于修正项随费米能的增大而增大.前述几个增大修正项的因素都使费米能增大.GUP特别对电子费米子系统影响巨大,因电子限度小(密度可很大)、质量小,导致费米能可很大.对于三维谐振外势,当电子密度接近 $10^{37}\text{ m}^{-3}$ 时(自由电子是 $10^{16}\text{ m}^{-3}$ )GUP的影响将会占据主导地位,此时应寻求其他的解决方法.

## 参 考 文 献

- [1] Kempf A, Mangano G, Mann R B. Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation [J]. Phys Rev D, 1995, 52(2): 1108-1118.
- [2] Amati D, Ciafaloni M, Veneziano G. Can spacetime be probed below the string size? [J]. Phys Lett B, 1988, 216(1/2): 41-47.
- [3] Garay L J. Quantum gravity and minimum length[J]. Int J Mod Phys A, 1995, 10(02): 145-165.
- [4] Scardigli F. Generalized uncertainty principle in quantum gravity from micro-black hole gedanken experiment [J]. Phys Lett B, 1999, 452(1): 39-44.
- [5] Chang L N, Minic D, Okamura N, et al. Exact solution of the harmonic oscillator in arbitrary dimensions with minimal length uncertainty relations[J]. Phys Rev D, 2001, 65(12): 397-398.
- [6] Chang L N, Minic D, Takeuchi T, et al. The effect of the minimal length uncertainty relation on the density of states and the cosmological constant problem [J]. Phys Rev D, 2002, 65(12): 397-398.
- [7] Li Xiang. Black hole entropy without brick walls [J]. Phys Rev D, 1995, 52(4): 9-13.

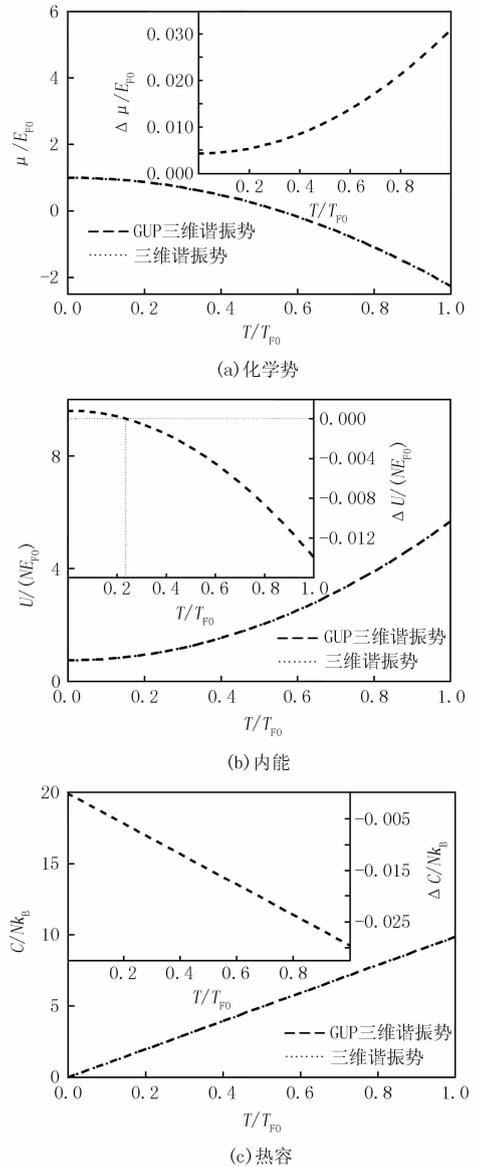


图1 三维谐振中,铜电子费米气体物理量及物理量差异(GUP对传统方法结果的修正,嵌入图)随温度的变化( $A=10^{36}\text{ m}^2\cdot(\text{J}\cdot\text{s})^{-2}$ ,  $n_0=8.5\times 10^{28}\text{ m}^{-3}$ )

- [8] Pedram P, Amirfakhrian M, Shababi II. On the  $(2+1)$ -dimensional Dirac equation in a constant magnetic field with a minimal length uncertainty[J]. Int J Mod Phys D, 2015, 24(02): 1550016.
- [9] Fityo V T. Statistical physics in deformed spaces with minimal length [J]. Phys Lett A, 2007, 372(37): 5872-5877.
- [10] Panella O. Casimir effect in minimal length theories based on a generalized uncertainty principle[J]. Phys Rev D, 2012, 85(4): 125-127.
- [11] Brau F, Buisseret F. Minimal length uncertainty relation and gravitational quantum well[J]. Phys Rev D, 2006, 74(3): 307-307.
- [12] Pedram P. New approach to nonperturbative quantum mechanics with minimal length uncertainty[J]. Phys Rev D, 2011, 85(2): 926-927.
- [13] Vakili B, Gorji M A. Thermostatistics with minimal length uncertainty relation [J]. J Sta Mech, 2012, 2012(10): P10013.
- [14] 李鹤龄, 王娟娟, 杨斌, 等. 广义不确定性原理下费米气体低温热力学性质[J]. 物理学报, 2015, 64(8): 80502-080502.
- [15] Regal C A, Greiner M, Jin D S. Observation of resonance condensation of fermionic atom pairs[J]. Phys Rev Lett, 2004, 92(4): 040403.
- [16] Jochim S, Bartenstein M, Altmeyer A, et al. Bose-Einstein condensation of molecules[J]. Science, 2003, 302(5653): 2101-2103.
- [17] Li M Z, Yan Z J, Chen J C, et al. Thermodynamic properties of an ideal Fermi gas in an external potential with  $U = brt$  in any dimensional space[J]. Phys Rev A, 1998, 58(58): 1445-1447.
- [18] 苏国珍, 陈丽璇. 弱相互作用费米气体的热力学性质[J]. 物理学报, 2005, 53(4): 984-990.
- [19] 门福殿. 弱磁场中弱相互作用费米气体的热力学性质[J]. 物理学报, 2006, 55(4): 1622-1627.
- [20] Chou T T, Yang C N, Yu L H. Bose-Einstein condensation of atoms in a trap[J]. Phys Rev A, 1996, 53(6): 4257-4259.
- [21] Huang K. Statistical mechanics [M]. New York: Wiley, 1963: 272-276
- [22] Pathria R K. Statistical Mechanics [M]. London: Pergamon Press, 1977.
- [23] 赵仁, 张丽春, 李怀繁. 广义测不准关系与三维 BTZ 黑洞熵[J]. 物理学报, 2009, 58(04): 2193-2196.
- [24] Quesne C, Tkachuk V M. More on a SUSYQM approach to the harmonic oscillator with nonzero minimal uncertainties in position and/or momentum[J]. J Phys A: Math General, 2004, 37(371): 10095-10113.
- [25] Dehmelt II. A single atomic particle forever floating at rest in free space; new value for electron radius[J]. Phys Scr, 1988, 22(T22): 102-110.

## Thermodynamic Properties of an Ideal Fermi Gas in Generalized External Potential in $n$ -dimensional Space under Generalized Uncertainty Principle

Li Heling, Wang Wenwei, Ren Jinxiu

( School of Physics and Electronic-Electrical Engineering; Key Lab on Information Sensing and Intelligent Desert, Ningxia University, Yinchuan 750021, China)

**Abstract:** With the semi-classical (Thomas-Fermi) approximation, the thermodynamic properties of a Fermi gas in generalized external potential are studied under the generalized uncertainty principle (GUP). The total particle number, internal energy and heat capacity of the Fermi system are calculated. Then, analytical expressions of the total particle number, internal energy, heat capacity, chemical potential, Fermi energy, ground state energy and amendments resulted by GUP are obtained at low temperatures. The influences of both the generalized uncertainty principle and external potential on the thermodynamic properties of copper electron gas and other electronic systems with higher electron density are studied numerically at low temperature. We find: 1) External potential has a significant impact on electronic system when the generalized uncertainty principle be considered. The amendments of the generalized uncertainty principle have increased by 6–11 orders of magnitude. 2) When the number density of particle is bigger and the quality of particle is smaller, the influence of generalized uncertainty principle is bigger. 3) When the generalized uncertainty principle is taken into account, the chemical potential, Fermi energy and the ground state energy increase with the increase of temperature, while the heat capacity decreases. When the temperature was low than 0.22 times  $T_{F0}$ , the internal energy increased with the increase of temperature, but which became to reduce when temperature was high than 0.22 times  $T_{F0}$  for copper electron gas.

**Keywords:** generalized uncertainty principle; Fermi gas; thermodynamic property