

边染色临界图边数的新下界

李卫奇,苗连英,齐林明

(中国矿业大学 理学院,江苏 徐州 221000)

摘 要: Vizing 于 1968 年提出猜想:如果图 G 是一个点数为 n ,边数为 m 的 Δ -临界图,那么满足 $m \geq \frac{1}{2}[(\Delta-1)n+3]$. 根据临界图的若干引理,利用差值转移规则给出 5-临界图和 6-临界图(不含三圈)边数的新下界,改进了已有的结果.

关键词: 临界图;度;边数

中图分类号: O157.5

文献标志码: A

本文考虑的图都是有限、简单、无向图.

定义 1^[1] 设 G 是一个图,用 $d(v)$ 表示 G 的顶点的度数, $V(G)$ 表示 G 的顶点集, $E(G)$ 表示 G 的边集, $\Delta(G)$ 表示 G 的最大度, $\delta(G)$ 表示 G 的最小度, m 表示 G 的边数, n 表示 G 的点数.

定义 2^[2-3] 若 $v \in V(G)$ 且 $d(v) = \Delta$, 则称 v 是 G 的主顶点.

定义 3^[4] 若对 G 的任何边 e , 令 $G' = G - e$, 如果 $\chi'(G') < \chi'(G)$, 则称 G 是临界的. 若 G 是临界的且 $\chi'(G) = \Delta$, 则称 G 是 Δ -临界图. 其中 $\chi'(G)$ 表示 G 的边色数.

1 主要引理

引理 1^[5] 设 $xy \in E(G)$, $d(x) = k$, 则有:

- 1) 若 $k < \Delta$, 则 y 至少与 $\Delta - k + 1$ 个主顶点邻接;
- 2) 若 $k = \Delta$, 则 y 至少与两个主顶点邻接;
- 3) G 至少有 $\Delta - \delta(G) + 2$ 个主顶点;
- 4) G 至少有 3 个主顶点.

引理 2^[6-7] 设 G 是 Δ -临界图且 $xy \in E(G)$, $d(x) + d(y) = \Delta + 2$, 则有:

- 1) x, y 的所有邻点(除 x, y)均为 Δ 度点;
- 2) 与 x 距离为 2 的点的度数至少为 $\Delta - 1$;
- 3) 当 $d(x), d(y) < \Delta$ 时, 与 x, y 距离为 2 的顶点的度均为 Δ .

引理 3^[8] 设 G 是 Δ -临界图, $\Delta \geq 5$, $d(x) = 3$, 则 x 至少有两个 Δ 度顶点, 记为: u, v 则 u, v 的邻点除 x 外其余的点 $\geq \Delta - 1$.

引理 4^[9] 设 G 是 Δ -临界图, $d(x) = 4$, 若 $\Delta \geq 6$, 则有:

- 1) 若 x 邻接一个 $(\Delta - 2)$ 度点, 则 x 的其他邻点均为 Δ 度顶点;
- 2) 若 x 的邻点全是 $(\geq \Delta - 1)$ 度点, 并且其中一个邻接 3 度点, 则 x 的其他 3 个邻点只邻接一个 $(\leq \Delta - 2)$ 度点;
- 3) 若 x 邻接 2 个 $(\Delta - 1)$ 度点, 则 x 的两个 Δ 度邻点只邻接一个 $(\leq \Delta - 2)$ 度点.

收稿日期:2014-05-27;修回日期:2014-10-21.

基金项目:国家自然科学基金(11271365)

作者简介:李卫奇(1991—),男,河南新乡人,中国矿业大学硕士研究生,研究方向为图的染色, E-mail: liweiqi0714@163.com.

引理 5^[10] 设 G 是 Δ -临界图, $d(x) = 4$, x 有一个 $(\Delta - 1)$ 度邻点, 记为 w . 如果 w (除 x 外) 邻接一个 $(\Delta - 1)$ 度顶点, 则 x 的其他 3 个邻点均为 Δ 度顶点, 且每一个 Δ 度顶点的邻点均 $\geq \Delta - 1$.

2 主要结果

定理 1 对于 5-临界图 (不含三圈), 有 $m \geq \frac{121}{56}n$.

证明 将运用差值转移的规则, 对相邻点之间进行转移, 从而达到要求.

规则 1 对 $d(x) = 2$ 的点, 邻接为两个 5 度顶点, 设为 u, v . 此时 u, v 向 x 转移差值 $\frac{19}{28}$, 并且 u, v 的邻点 (异于 x) 向 x 转移差值 $\frac{19}{28} \times \frac{1}{5}$.

规则 2 对 $d(x) = 3$ ($\delta(x) = 4$) 的点, 设 x 的 3 个邻点分别为 v_1, v_2, v_3 且 $d(v_1) = 4$, 此时 v_1 向 x 转移差值 0, v_2, v_3 向 x 转移差值 $\frac{19}{28}$.

规则 3 对 $d(x) = 3$ ($\delta(x) = 5$). 设 x 的 3 个邻点分别为 v_1, v_2, v_3 且 $d(v_1) = 5$, 则 v_1 最多关联两个 < 5 度的点. 此时 v_1 向 x 转移差值 $\frac{19}{28} \times \frac{1}{j}$, v_2, v_3 向 x 转移差值 $\frac{19}{28}$, j 表示与 v_1 点所邻接 3, 4 度的顶点个数之和.

规则 4 对 $d(x) = 4$, 则 x 从与 x 相邻接的 5 度邻点上转移 $\frac{5}{28}$.

下面按照顶点的度数分别进行讨论. 文中 $c'(x) = c(x) - \frac{121}{28}$ 为经过差值转移后所得新值.

情形 1 对 $d(x) = 2$ 的点

设 x 是一个 2 度顶点, x 邻接 2 个 5 度顶点, 设为 u, v . 由引理 2 及本文所限定的条件, u 邻接 4 个不同于 v 的 5 度顶点, v 同样如此, 根据规则 1, 有 $c'(x) \geq c(x) + \frac{19}{28} \times 2 + 2 \times 4 \times \frac{19}{28} \times \frac{1}{5} = \frac{17}{140} \geq 0$.

情形 2 对 $d(x) = 3$ 的点.

若 $\delta(x) = 4$, 设 3 个邻点为 v_1, v_2, v_3 且 $d(v_1) = 4$, 则由引理 2, v_2, v_3 邻点度数 (除 x 外) 均 ≥ 4 且 v_1 有 4 个不同于 x 的 5 度顶点, 由规则 2 知: $c'(x) \geq c(x) + \frac{19}{28} \times 2 = \frac{1}{28} \geq 0$.

若 $\delta(x) = 5$, 则由引理 3, x 邻接的 3 个 5 度顶点中至少有 2 个其邻点 (除 x 外) 度数均大于等于 4, 这两个 5 度顶点均向 x 转移差值 $\frac{19}{28}$, x 的另一个邻点至少向 x 转移差值 $\frac{19}{28} \times \frac{1}{2}$, 所以由规则 3 知

$$c'(x) \geq c(x) + \frac{19}{28} \times 2 + \frac{19}{28} \times \frac{1}{2} = \frac{21}{56} \geq 0.$$

情形 3 对 $d(x) = 4$ 的点.

与 x 相邻接的至少两个 5 度顶点, 由规则 4 可知: $c'(x) \geq c(x) + \frac{5}{28} \times 2 = \frac{1}{28} \geq 0$.

情形 4 对 $d(x) = 5$ 的点.

若 $\delta_1(x) = 2$, 由引理 2 知 x 的其他邻点均为 5 度点, 且与 x 距离为 2 的点的度数均为 4, 由规则 1, x 向它的 2 度邻点转移差值 $\frac{19}{28}$, 则: $c'(x) \geq c(x) - \frac{19}{28} \geq 0$.

若 $\delta(x) = 3, 4$, 由规则 3 和 4, x 至多向它的邻点转移差值 $\frac{19}{28}$, 则 $c'(x) \geq c(x) - \frac{19}{28} \geq 0$.

通过以上验证可知, 对于 5-临界图 (不含三圈) 的任意顶点 x , 通过差值转移规则, 都可以得到 $c'(x) \geq 0$, 结论成立.

定理 2 对于 6-临界图 (不含三圈), 有 $m \geq \frac{133}{52}n$.

证明 将运用差值转移的规则,对相邻点之间进行转移,从而达到要求.

规则 1' 对 $d(x) = 2$ 的点,邻接两个 6 度顶点,设为 u, v . 此时 u, v 向 x 转移差值 $\frac{23}{26}$, 且 u, v 的邻点(异于 x) 向 x 转移差值 $\frac{23}{26} \times \frac{1}{6}$.

规则 2' 对 $d(x) = 3(\delta(x) = 5)$ 的点,设 x 的 3 个邻点分别为 v_1, v_2, v_3 , 且 $d(v_1) = 5$, 此时 v_1 向 x 转移差值 0, v_1 的邻点除 x 外向 x 转移差值 $\frac{23}{26} \times \frac{1}{6}$, v_2, v_3 向 x 转移差值 $\frac{23}{26}$.

规则 3' 对 $d(x) = 3(\delta(x) = 6)$. 设 x 的 3 个邻点分别为 v_1, v_2, v_3 , 且 v_1 最多关联两个小于 5 度的点. 此时 v_1 向 x 转移差值 $\frac{23}{26} \times \frac{1}{j}$, v_2, v_3 向 x 转移差值 $\frac{23}{26}$. j 表示与 v_1 点所邻接 3, 4 度的顶点个数之和.

规则 4' 对 $d(x) = 4$, 则 x 从与 x 相邻接的 6 度邻点上转移 $\frac{23}{26}$ 且 $(\Delta - 2)$ 度邻点的邻点向 x 转移差值 $\frac{23}{26} \times \frac{1}{6}$.

规则 5' 对 $d(x) = 5$, 则 x 从与其相邻接的 6 度点上转移 $\frac{1}{26}$ 即可.

下面按照顶点的度数分别进行讨论. 文中 $c''(x) = c(x) - \frac{132}{26}$, 为经过差值转移后所得新值.

情形 1 对 $d(x) = 2$ 的点

设 x 是一个 2 度顶点, x 邻接 2 个 6 度顶点, 设为 v_2, v_3 . 由引理 2 及本文所限定的条件, u 邻接 4 个不同于 v 的 6 度顶点, v 同样如此, 根据规则 1', 有 $c''(x) \geq c(x) + \frac{23}{26} \times 2 + 2 \times 5 \times \frac{23}{26} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{65} \geq 0$.

情形 2 对 $d(x) = 3$ 的点.

若 $\delta(x) = 5$, 设 3 个邻点为 v_1, v_2, v_3 , 则由引理 2, v_2, v_3 邻点度数(除 x 外)均 ≥ 5 且 v_1 有 5 个不同于 x 的 6 度顶点, 由规则 2' 知: $c''(x) \geq c(x) + \frac{23}{26} \times 2 + \frac{23}{26} \times \frac{1}{6} \times 5 \geq 0$.

若 $\delta(x) = 6$, 则由引理 3, x 邻接的 3 个 6 度顶点中至少有 2 个其邻点(除 x 外)度数均大于等于 5, 这两个 6 度顶点均向 x 转移差值 $\frac{23}{26}$, x 的另一个邻点至少向 x 转移差值 $\frac{23}{26} \times \frac{1}{2}$, 所以由规则 3'

$$c''(x) \geq c(x) + \frac{23}{26} \times 2 + \frac{23}{26} \times \frac{1}{2} = \frac{57}{52} \geq 0.$$

情形 3 对 $d(x) = 4$ 的点.

若 $\delta(x) = 4$, 由引理 2 知, x 的其他邻点均为 7 度, 且 x 邻点的邻点为 7 度, 规则 3' 知:

$$c''(x) = c(x) + \frac{23}{26} \times 3 = \frac{20}{13} \geq 0.$$

若 $\delta(x) = 5$, 则 x 要么邻接 1 个 5 度点, 要么邻接 2 个 5 度点. 对于这两种情况都至少有两个 6 度点, 则:

$$c''(x) = c(x) + \frac{23}{26} \times 2 = \frac{17}{26} \geq 0.$$

情形 4 对 $d(x) = 5$ 的点.

每个 x 至少邻接两个 6 度点, 则由规则 5' 可知: $c''(x) = c(x) + \frac{1}{26} \times 2 = 0$.

情形 5 对 $d(x) = 6$ 的点.

若 $\delta_1(x) = 2$, 由引理 2 知, x 的其他邻点均为 6 度点, 且与 x 距离为 2 的点的度数均 ≥ 5 , 规则 1', 向它的 2 度邻点转移 $\frac{23}{26}$, 则: $c''(x) = c(x) - \frac{23}{26} = 0 \geq 0$.

若 $\delta(x) = 3, 4$, 由规则 3' 和 4', x 至多向它的邻点转移差值 $\frac{23}{26}$, 则 $c''(x) = c(x) - \frac{23}{26} = 0 \geq 0$.

若 $\delta(x) = 5$, 由规则 5', x 至多向它的邻点转移差值 $\frac{23}{26}$, 则 $c''(x) = c(x) - \frac{23}{26} = 0 \geq 0$.

通过以上验证可知, 对于 6- 临界图(不含三圈) 的任意顶点 x , 通过差值转移规则, 都可以得到 $c''(x) \geq 0$, 结论成立.

3 结 论

临界图具有很多邻接性质, 运用差值转移的方法得到边染色 5- 临界图和 6- 临界图(不含三圈) 边数的下界分别为 $m \geq \frac{121}{56}n$ 和 $m \geq \frac{133}{52}n$, 比目前最好的结果 $m \geq \frac{15}{7}n^{[2]}$ 和 $m \geq \frac{33}{13}n^{[4]}$ 分别提高了 $\frac{1}{56}n$ 和 $\frac{1}{52}n$. 所得结论更接近 Vizing 猜想^[11], 更有意义.

致谢 对所有帮助该论文顺利完成的老师和同学表示诚挚的谢意.

参 考 文 献

- [1] 邦 迪. 图论及其应用[M]. 吴望名, 译. 北京: 科学出版社, 1984.
- [2] Luo Rong, Zhang Cunquan. Edge coloring of graphs with small average degree[J]. Discrete Mathematics, 2004, 275: 207-218.
- [3] Luo Rong, Miao Lianying, Zhao Yue. The size of edge chromatic critical graphs with maximum degree 6[J]. J Graph Theory, 2009, 60: 149-171.
- [4] Woodall D R. The average degree of an edge-chromatic critical graph[J]. Discrete Mathematics, 2008, 308: 803-819.
- [5] Vizing V G. Critical graphs with a given chromatic class[J]. DiskretAnaliz, 1965(5): 9-17.
- [6] Woodall D R. The average degree of an edge-chromatic critical graph II[J]. J Graph Theory, 2007, 56(3): 194-218.
- [7] Miao Lianying. On the size of critical graphs with maximum degree 8[J]. Discrete Mathematics, 2010, 310: 2215-2218.
- [8] Vizing V G. Critical graphs with a given chromatic class[J]. Diskretnyi Analiz Issledovanie Operatsii, 1965(5): 9-17.
- [9] LI Shuchao, Li Xuechao. Edge coloring of graphs with small maximum degrees[J]. Discrete Mathmatice, 2009, 309: 4843-4852.
- [10] Miao Lianying. On the average of critical graphs with maximum degree six[J]. Discrete Mathematics, 2011, 311: 2574-2576.
- [11] Zhao Yue. New lower bounds for the size of edge chromatic critical graphs[J]. J Graph Theory, 2004, 46(2): 81-92.

The New Size of Edge Chromatic Critical Graphs

LI Weiqi, MIAO Lianying, QI Linming

(School of Mathematics, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221000, China)

Abstract: In 1968, Vizing proposed the following conjecture: If $G = (V, E)$ is a critical graph of order n and size m , then $m \geq \frac{1}{2}[(\Delta - 1)n + 3]$. Based on some lemmas on critical graphs and the discharging method, a new lower bound for the size of edge chromatic critical graphs with maximum degree 5 and 6 are given.

Keywords: critical graphs; degree; the size of edge