

多输出集分裂公共不动点问题的强收敛方法

王丰辉^{1,2}, 尚晓梦¹, 张丽², 赵浩辰³

(1.河南师范大学 数学与统计学院,河南 新乡 453007;2.洛阳师范学院 数学科学学院,河南 洛阳 471934;

3.郑州航空工业管理学院 机械工程学院,郑州 450046)

摘要:本文针对半压缩算子族的多输出集分裂公共不动点问题,提出了新型多步交替惯性迭代算法,并且在适当条件下建立了该算法生成序列的强收敛定理.该算法融合了多步惯性加速技术与自适应步长策略,使其能够灵活应对不同计算的场景,提升迭代的稳定性与收敛效率.

关键词:不动点;半压缩映射;半闭性

中图分类号:O177.4

文献标志码:A

文章编号:1000-2367(2026)04-0060-06

设 C 和 Q 分别为实 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H}_1$ 中的非空闭凸子集. 分裂可行性问题(SFP)^[1-2]可以描述为以下形式:求 $x \in C$ 使得 $Ax \in Q$, 其中 $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_1$ 是一个有界线性算子. 这一问题在诸如医学成像、信号处理、基因调控、图像恢复和稀疏正则化等领域^[3]有着广泛的应用,因此受到了国内外学者的持续关注.

SFP 的一个自然推广为分裂公共不动点问题(SCFP):

$$\text{求 } x \in \text{Fix}(S) \text{ 使得 } Ax \in \text{Fix}(T), \quad (1)$$

其中 $\text{Fix}(S)$ 和 $\text{Fix}(T)$ 分别是非线性算子 $S: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ 和 $T: \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2$ 的不动点集. 近年来,许多学者对 SCFP 进行了深入研究,并提出了多种有效的求解方法.例如,文献[4-7]中提出了多种迭代方法,并在理论上证明了它们的收敛性.2009年,Censor等^[8]为求解拟固定非扩张算子类的 SCFP 提出了并行方法,其形式为

$$x_{n+1} = S[x_n + \gamma A^*(T - \text{Id})Ax_n]. \quad (2)$$

其中 $\gamma \in (0, \frac{2}{L})$, L 是矩阵 A^*A 的最大特征值. 该方法通过并行计算的方式,进一步提高了求解效率.2017年,Wang^[9]提出了一种不需要任何算子范数先验信息的方法,并证明了其强收敛性:

$$x_{n+1} = \alpha_n u + (1 - \alpha_n)[x_n - \gamma_n(x_n - Sx_n + A^*(\text{Id} - T)Ax_n)]. \quad (3)$$

其中步长序列 γ_n 选择为

$$\gamma_n = \frac{\|x_n - Sx_n\|^2 + \|(\text{Id} - T)Ax_n\|^2}{\|x_n - Sx_n + A^*(\text{Id} - T)Ax_n\|^2}. \quad (4)$$

这一方法的提出,解决了传统方法中需要预先知道算子范数的问题,使其在实际应用中更具可行性.随后,Cui等^[10]应用上述方法求解多输出集分裂公共不动点问题(SCFP-MOS).给定正整数 $N \geq 1$,SCFP-MOS 求解下列问题:

收稿日期:2025-03-28;**修回日期:**2025-05-14.

基金项目:河南省杰出青年科学基金(252300421057);河南省高校科技创新团队(26IRTSTHN024);国家自然科学基金(11971216);河南省高等学校重点科研项目(26A1100130).

作者简介:王丰辉(1980-),男,河南登封人,洛阳师范学院教授,博士,河南省杰出青年科学基金获得者,研究方向为泛函分析,E-mail:wfenghui@lynu.edu.cn.

通信作者:尚晓梦,E-mail:xiaomeng_shang@hotmail.com;赵浩辰,E-mail:zhczhao6@163.com.

引用本文:王丰辉,尚晓梦,张丽,等.多输出集分裂公共不动点问题的强收敛方法[J].河南师范大学学报(自然科学版),2026,54(4):60-65.(Wang Fenghui,Shang Xiaomeng,Zhang Li,et al.Strongly convergent methods for the split common fixed point problem with multiple output sets[J].Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition),2026,54(4):60-65.DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2025.03.28.0001.)

$$x \in \text{Fix}(S) \cap \left(\bigcap_{j=1}^N \mathbf{A}_j^{-1}(\text{Fix}(T_j)) \right), \quad (5)$$

其中 $S: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, T_j: \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_j$ 是非线性算子, $\mathbf{A}_j \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}_j), j \in \{1, \dots, N\}$. 显然, 当 $N=1$ 时, 问题(5)退化为问题(1), 即分裂公共不动点问题. 他们提出了几种新方法, 并在相关非线性映射是半压缩时, 建立了其收敛定理.

在优化领域中, 惯性方法作为一种常用的加速技巧, 被广泛应用于提升迭代过程的收敛效率. 近期, Mu 等^[11]创新性地提出了交替惯性方法, 具体格式如下:

$$w_n = \begin{cases} x_n, & n = \text{偶数}, \\ x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}), & n = \text{奇数}, \end{cases} \quad (6)$$

其中, $\{\theta_n\}$ 代表一个非负序列. 其作用在于, 当 n 为奇数时, 通过引入 $\theta_n(x_n - x_{n-1})$ 这一惯性项, 使得迭代点 w_n 不仅依赖于当前点 x_n , 还与前一个点 x_{n-1} 相关, 从而利用了迭代过程中的历史信息, 有效加速了收敛. 随后, Liang^[12]对惯性方法进行了进一步拓展, 提出了多步惯性方法. 该方法的迭代公式为:

$$w_n = x_n + \sum_{i \in U} \theta_{n,i}(x_{n-i} - x_{n-i-1}), \quad (7)$$

其中 $U := \{0, 1, 2, \dots, s-1\}$, 这里的 $s \in \mathbf{N}_+$, 表示一个正整数, 它决定了参与计算惯性项的历史迭代点的数量. 而 $\{\theta_{n,i}\}_{i \in U} \subset (-1, 1)^s$ 意味着对于每一个 n , 系数 $\theta_{n,i}$ 是一个取值在 $(-1, 1)$ 区间内的 s 维向量. 相较于交替惯性方法, 多步惯性方法通过这些不同系数 $\theta_{n,i}$ 对各历史点差异进行加权组合, 显著提升了迭代过程的收敛速度.

基于上述研究工作, 本文继续研究半压缩映射的多输出集分裂公共不动点问题. 受交替惯性和多步惯性方法思想的启发, 引入了一种多步交替惯性迭代方法, 并建立了新方法的强收敛定理.

1 预备知识

设 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H}_j$ 是实 Hilbert 空间, $j = 1, 2, \dots, N$. Id 表示单位算子, $\text{Fix}(T)$ 表示算子 T 的不动点集, 符号“ $\rightarrow$ ”表示强收敛, “ $\rightharpoonup$ ”表示弱收敛.

定义 1 若对任意满足 $x_n \rightarrow x$ 和 $(\text{Id} - T)x_n \rightarrow 0$ 的序列 $\{x_n\}$, 均有 $x \in \text{Fix}(T)$, 则称算子 $\text{Id} - T$ 在 0 处是半闭的.

定义 2 设 $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ 是一个算子, 且 $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$. 如果存在常数 $\mu \in [0, 1)$ 使得 $\|Tx - z\|^2 \leq \|x - z\|^2 + \mu \|x - Tx\|^2, \forall x \in \mathcal{H}, z \in \text{Fix}(T)$; 或等价地 $\langle x - Tx, x - z \rangle \geq \frac{1-\mu}{2} \|x - Tx\|^2, \forall x \in \mathcal{H}, z \in \text{Fix}(T)$, 则称 T 是 μ -半压缩的.

假设 $C \subseteq \mathcal{H}$ 是一个非空闭凸子集. 从 $\mathcal{H}$ 到 C 的度量投影 P_C 定义为 $P_C x = \arg \min_{y \in C} \|x - y\|, x \in \mathcal{H}$.

引理 1 设 $x \in \mathcal{H}$ 则 $y = P_C x$ 当且仅当 $y \in C$, 并且 $\langle x - y, z - y \rangle \leq 0, \forall z \in C$.

引理 2^[13] 设 $\{a_n\} \subseteq [0, \infty), \{b_n\} \subseteq \mathbf{R}$ 都是有界序列, 且满足 $a_{n+1} \leq (1 - \alpha_n)a_n + \alpha_n b_n + d_n - \epsilon_n c_n$,

其中: (I) $\{\alpha_n\} \subseteq [0, 1], \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$; (II) $\{d_n\} \subseteq \mathbf{R}, \sum_{n=0}^{\infty} |d_n| < \infty$; (III) $\{\epsilon_n\} \subseteq (0, \infty), \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\epsilon_n} = 0$; (IV)

对任意子列 $\{n_k\}, c_{n_k} \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} b_{n_k} \leq 0$. 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

2 收敛性分析

在本节中, 构造求解多输出集分裂公共不动点问题的交替多步迭代方法, 并引入自适应步长. 随后, 证明该方法的强收敛性. 该方法成立的条件如下:

1) $S: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, T_j: \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_j$ 分别是 μ, μ_j -半压缩算子, $\mu \in [0, 1), \mu_j \in [0, 1), \mathbf{A}_j \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}_j)$, 且 $\text{Id} - S, \text{Id} - T_j$ 在零点处半闭, $j \in \{1, \dots, N\}$.

2) SCFP-MOS 的解集 $\Omega := \{x \in \mathcal{H}: x \in \text{Fix}(S), \mathbf{A}_j x \in \text{Fix}(T_j), 1 \leq j \leq N\} \neq \emptyset$.

3) $\{\epsilon_n\}$ 和 $\{\alpha_n\}$ 满足 $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n < \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \epsilon_n = o(\alpha_n)$.

4) $u, x_0 \in \mathcal{H}, \alpha > 0, \gamma \in (0, \bar{\gamma}), \bar{\gamma} = 1 - \max(\mu, \max_j \mu_j)$.

5) 若 $n \geq s$, 则 $U := \{0, 1, 2, \dots, s-1\}$, 若 $n < s$, 则 $U := \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, 其中 $n, s \in \mathbf{N}_+$.

方法 1 多步交替惯性方法

第 0 步 令 $\{\alpha_n\} \in (0, 1), \theta \in [0, 1), \{\theta_{n,i}\}_{i \in U} \subset (-1, 1)^{|U|}$ ($|U|$ 表示 U 中元素的个数).

第 1 步 任取初始点 $x_0, x_1 \in \mathcal{H}$, 并设 $n := 1$. 计算

$$w_n = \begin{cases} x_n, & n = \text{偶数}, \\ x_n + \sum_{i \in U} \theta_{n,i} (x_{n-i} - x_{n-i-1}), & n = \text{奇数}, \end{cases}$$

其中 $0 \leq |\theta_{n,i}| < \theta_n, \{\epsilon_n\}$ 是一个满足 $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n < \infty$ 且 $\epsilon_n = o(\alpha_n)$ 的正数序列,

$$\theta_n = \begin{cases} \min\left\{\theta, \frac{\epsilon_n}{\sum_{i \in U} \|x_{n-i} - x_{n-i-1}\|}\right\}, & \text{如果 } \sum_{i \in U} \|x_{n-i} - x_{n-i-1}\| \neq 0, \\ \theta, & \text{如果 } \sum_{i \in U} \|x_{n-i} - x_{n-i-1}\| = 0. \end{cases}$$

第 2 步 计算

$$\begin{aligned} y_n &= w_n - Sw_n + \sum_{j=1}^N \mathbf{A}_j^* (\text{Id} - T_j) \mathbf{A}_j w_n, \\ x_{n+1} &= \alpha_n u + (1 - \alpha_n)(w_n - \gamma \tau_n y_n). \end{aligned}$$

第 3 步 更新

$$\tau_n = \frac{\|w_n - Sw_n\|^2 + \sum_{j=1}^N \|(\text{Id} - T_j) \mathbf{A}_j w_n\|^2}{\|w_n - Sw_n + \sum_{j=1}^N \mathbf{A}_j^* (\text{Id} - T_j) \mathbf{A}_j w_n\|^2}.$$

第 4 步 如果 $x_{n+1} = w_n$, 则停止, 此时 $w_n \in \Omega$; 否则, 更新 $n := n + 1$ 并返回第 1 步.

引理 3 由方法 1 生成的序列 $\{x_n\}$ 是有界的.

证明 设 $z \in \Omega$, 则 $z \in \text{Fix}(S)$, 且 $z \in \mathbf{A}_j^{-1}(\text{Fix}(T_j)), j = 1, \dots, N$, 得到

$$\begin{aligned} \langle y_n, w_n - z \rangle &= \langle w_n - Sw_n + \sum_{j=1}^N \mathbf{A}_j^* (\text{Id} - T_j) \mathbf{A}_j w_n, w_n - z \rangle = \langle w_n - Sw_n, w_n - z \rangle + \\ &\sum_{j=1}^N \langle (\text{Id} - T_j) \mathbf{A}_j w_n, \mathbf{A}_j w_n - \mathbf{A}_j z \rangle \geq \frac{1-\mu}{2} \|w_n - Sw_n\|^2 + \sum_{j=1}^N \frac{1-\mu_j}{2} \|(\text{Id} - T_j) \mathbf{A}_j w_n\|^2 \geq \\ &\frac{1}{2} \bar{\gamma} (\|w_n - Sw_n\|^2 + \sum_{j=1}^N \|(\text{Id} - T_j) \mathbf{A}_j w_n\|^2). \end{aligned} \quad (8)$$

利用式(8), 有

$$\begin{aligned} \|w_n - \gamma \tau_n y_n - z\|^2 &= \|w_n - z\|^2 - 2\gamma \tau_n \langle y_n, w_n - z \rangle + \gamma^2 \tau_n^2 \|y_n\|^2 \leq \|w_n - z\|^2 - \\ &\gamma \bar{\gamma} \frac{(\|w_n - Sw_n\|^2 + \sum_{j=1}^N \|(\text{Id} - T_j) \mathbf{A}_j w_n\|^2)^2}{\|w_n - Sw_n + \sum_{j=1}^N \mathbf{A}_j^* (\text{Id} - T_j) \mathbf{A}_j w_n\|^2} + \gamma^2 \frac{(\|w_n - Sw_n\|^2 + \sum_{j=1}^N \|(\text{Id} - T_j) \mathbf{A}_j w_n\|^2)^2}{\|w_n - Sw_n + \sum_{j=1}^N \mathbf{A}_j^* (\text{Id} - T_j) \mathbf{A}_j w_n\|^2} = \\ &\|w_n - z\|^2 - \gamma(\bar{\gamma} - \gamma) \frac{(\|w_n - Sw_n\|^2 + \sum_{j=1}^N \|(\text{Id} - T_j) \mathbf{A}_j w_n\|^2)^2}{\|w_n - Sw_n + \sum_{j=1}^N \mathbf{A}_j^* (\text{Id} - T_j) \mathbf{A}_j w_n\|^2}. \end{aligned}$$

由此可得:

$$\|w_n - \gamma \tau_n y_n - z\| \leq \|w_n - z\|. \quad (9)$$

根据 \$\{w_n\}\$ 的定义,有

$$\begin{aligned} \|w_{2n+1} - z\| &= \|x_{2n+1} + \sum_{i \in U} \theta_{2n+1,i} (x_{2n+1-i} - x_{2n-i}) - z\| \leq \\ &\|x_{2n+1} - z\| + \sum_{i \in U} |\theta_{2n+1,i}| \cdot \|x_{2n+1-i} - x_{2n-i}\|. \end{aligned} \quad (10)$$

因此,可以得到

$$\begin{aligned} \|x_{2n+2} - z\| &= \|\alpha_{2n+1}u + (1 - \alpha_{2n+1})(w_{2n+1} - \gamma \tau_{2n+1}y_{2n+1}) - z\| \leq \alpha_{2n+1}\|u - z\| + (1 - \\ &\alpha_{2n+1})\|w_{2n+1} - \gamma \tau_{2n+1}y_{2n+1} - z\| \leq \alpha_{2n+1}\|u - z\| + (1 - \alpha_{2n+1})\|w_{2n+1} - z\| \leq \\ &\alpha_{2n+1}(\|u - z\| + \sum_{i \in U} \frac{|\theta_{2n+1,i}|}{\alpha_{2n+1}}\|x_{2n+1-i} - x_{2n-i}\|) + (1 - \alpha_{2n+1})\|x_{2n+1} - z\|. \end{aligned} \quad (11)$$

同样地,根据式(9),得到

$$\begin{aligned} \|x_{2n+1} - z\| &\leq \alpha_{2n}\|u - z\| + (1 - \alpha_{2n})\|w_{2n} - \gamma \tau_{2n}y_{2n} - z\| \leq \alpha_{2n}\|u - z\| + (1 - \alpha_{2n})\|w_{2n} - z\| \leq \\ &\alpha_{2n}(\|u - z\| + \sum_{i \in U} \frac{|\theta_{2n,i}|}{\alpha_{2n}}\|x_{2n-i} - x_{2n-i-1}\|) + (1 - \alpha_{2n})\|x_{2n} - z\|. \end{aligned} \quad (12)$$

将式(11)和(12)结合起来,可以得到

$$\|x_{n+1} - z\| \leq \alpha_n(\|u - z\| + \sum_{i \in U} \frac{|\theta_{n,i}|}{\alpha_n}\|x_{n-i} - x_{n-i-1}\|) + (1 - \alpha_n)\|x_n - z\|. \quad (13)$$

根据 \$|\theta_{n,i}|\$ 的限制和 \$\hat{\theta}_n\$ 的定义,有 \$\sum_{i \in U} |\theta_{n,i}| \cdot \|x_{n-i} - x_{n-i-1}\| \leq \hat{\theta}_n \sum_{i \in U} \|x_{n-i} - x_{n-i-1}\| \leq \epsilon_n\$. 并且由

于 \$\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n < \infty\$, 得到 \$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i \in U} \hat{\theta}_n \|x_{n-i} - x_{n-i-1}\| < \infty\$, 这意味着 \$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\theta}_n \sum_{i \in U} \|x_{n-i} - x_{n-i-1}\| = 0\$. 因此可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i \in U} |\theta_{n,i}| \cdot \|x_{n-i} - x_{n-i-1}\|}{\alpha_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\epsilon_n}{\alpha_n} = 0.$$

故存在一个常数 \$c\$, 使得 \$\frac{\sum_{i \in U} |\theta_{n,i}| \cdot \|x_{n-i} - x_{n-i-1}\|}{\alpha_n} \leq c\$. 通过数学归纳法, 可以得到

$$\|x_{n+1} - z\| \leq \max\{\|u - z\| + c, \|x_0 - z\|\}.$$

由此, 可以得出序列 \$\{x_n\}\$ 是有界的, 序列 \$\{w_n\}\$ 也是有界的.

定理 1 由方法 1 生成的序列 \$\{x_n\}\$ 强收敛到 \$p = P_\Omega(u)\$.

证明 根据 \$\{w_n\}\$ 的定义, 有

$$\begin{aligned} \|w_{2n+1} - p\|^2 &= \|x_{2n+1} - p + \sum_{i \in U} \theta_{2n+1,i} (x_{2n+1-i} - x_{2n-i})\|^2 = \|x_{2n+1} - p\|^2 + 2\langle x_{2n+1} - \\ &p, \sum_{i \in U} \theta_{2n+1,i} (x_{2n+1-i} - x_{2n-i}) \rangle + \langle \sum_{i \in U} \theta_{2n+1,i} (x_{2n+1-i} - x_{2n-i}), \sum_{i \in U} \theta_{2n+1,i} (x_{2n+1-i} - x_{2n-i}) \rangle \leq \\ &\|x_{2n+1} - p\|^2 + 2 \sum_{i \in U} |\theta_{2n+1,i}| \cdot \|x_{2n+1-i} - x_{2n-i}\| \times (\|x_{2n+1} - p\| + \\ &\sum_{i \in U} |\theta_{2n+1,i}| \cdot \|x_{2n+1-i} - x_{2n-i}\|) \leq \|x_{2n+1} - p\|^2 + M\epsilon_{2n+1}, \end{aligned} \quad (14)$$

其中 \$M = \sup_n 2(\|x_{2n+1} - p\| + \sum_{i \in U} |\theta_{2n+1,i}| \cdot \|x_{2n+1-i} - x_{2n-i}\|)\$. 然后根据式(14), 有

$$\begin{aligned} \|x_{2n+2} - p\|^2 &= \|\alpha_{2n+1}u + (1 - \alpha_{2n+1})(w_{2n+1} - \gamma \tau_{2n+1}y_{2n+1}) - p\|^2 \leq (1 - \alpha_{2n+1})\|w_{2n+1} - \gamma \tau_{2n+1}y_{2n+1} - \\ &p\|^2 + 2\alpha_{2n+1}\langle u - p, x_{2n+2} - p \rangle \leq (1 - \alpha_{2n+1})\|w_{2n+1} - p\|^2 + 2\alpha_{2n+1}\langle u - p, x_{2n+2} - p \rangle - \\ &((\|w_{2n+1} - Sw_{2n+1}\|^2 + \sum_{j=1}^N \|(\text{Id} - T_j)A_j w_{2n+1}\|^2)^2 \\ &(1 - \alpha_{2n+1})\gamma(\bar{\gamma} - \gamma) \frac{\|w_{2n+1} - Sw_{2n+1} + \sum_{j=1}^N A_j^* (\text{Id} - T_j) A_j w_{2n+1}\|^2}{(1 - \alpha_{2n+1})\|x_{2n+1} - p\|^2 + 2\alpha_{2n+1}\langle u - p, x_{2n+2} - p \rangle + M\epsilon_{2n+1} - (1 - \end{aligned}$$

$$\alpha_{2n+1})\gamma(\bar{\gamma}-\gamma) \frac{(\|\omega_{2n+1}-S\omega_{2n+1}\|^2 + \sum_{j=1}^N \|(\text{Id}-T_j)\mathbf{A}_j\omega_{2n+1}\|^2)^2}{\|\omega_{2n+1}-S\omega_{2n+1} + \sum_{j=1}^N \mathbf{A}_j^*(\text{Id}-T_j)\mathbf{A}_j\omega_{2n+1}\|^2}. \quad (15)$$

类似可得:

$$\begin{aligned} \|x_{2n+1}-p\|^2 &\leq (1-\alpha_{2n})\|x_{2n}-p\|^2 + 2\alpha_{2n}\langle u-p, x_{2n+1}-p \rangle - \\ &\quad (1-\alpha_{2n})\gamma(\bar{\gamma}-\gamma) \frac{(\|\omega_{2n}-S\omega_{2n}\|^2 + \sum_{j=1}^N \|(\text{Id}-T_j)\mathbf{A}_j\omega_{2n}\|^2)^2}{\|\omega_{2n}-S\omega_{2n} + \sum_{j=1}^N \mathbf{A}_j^*(\text{Id}-T_j)\mathbf{A}_j\omega_{2n}\|^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

综上可得关键不等式:

$$\begin{aligned} \|x_{n+1}-p\|^2 &\leq (1-\alpha_n)\|x_n-p\|^2 + 2\alpha_n\langle u-p, x_{n+1}-p \rangle + d_n - \\ &\quad (1-\alpha_n)\gamma(\bar{\gamma}-\gamma) \frac{(\|\omega_n-S\omega_n\|^2 + \sum_{j=1}^N \|(\text{Id}-T_j)\mathbf{A}_j\omega_n\|^2)^2}{\|\omega_n-S\omega_n + \sum_{j=1}^N \mathbf{A}_j^*(\text{Id}-T_j)\mathbf{A}_j\omega_n\|^2}, \end{aligned} \quad (17)$$

其中, 当 n 为奇数, $d_n = M\epsilon_n$; 否则 $d_n = 0$. 定义

$$\begin{aligned} a_n &= \|x_n-p\|^2, b_n = 2\langle u-p, x_{n+1}-p \rangle, \epsilon_n = (1-\alpha_n)\gamma(\bar{\gamma}-\gamma), \\ c_n &= \frac{(\|\omega_n-S\omega_n\|^2 + \sum_{j=1}^N \|(\text{Id}-T_j)\mathbf{A}_j\omega_n\|^2)^2}{\|\omega_n-S\omega_n + \sum_{j=1}^N \mathbf{A}_j^*(\text{Id}-T_j)\mathbf{A}_j\omega_n\|^2}. \end{aligned}$$

则式(17)可以改写为:

$$a_{n+1} \leq (1-\alpha_n)a_n + \alpha_nb_n + d_n - \epsilon_nc_n. \quad (18)$$

容易证明 $\sum_n d_n < \infty$. 根据 $\{\epsilon_n\}$ 的定义,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\epsilon_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{(1-\alpha_n)\gamma(\bar{\gamma}-\gamma)} = 0. \quad (19)$$

假设存在 $\{c_n\}$ 的子列 $\{c_{n_k}\}$, 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} c_{n_k} = 0$. 需要证明 $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} b_{n_k} = 2\langle u-p, x_{n_k+1}-p \rangle \leq 0$.

根据 $\{c_n\}$ 的定义, 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(\|\omega_{n_k}-S\omega_{n_k}\|^2 + \sum_{j=1}^N \|(\text{Id}-T_j)\mathbf{A}_j\omega_{n_k}\|^2)^2}{\|\omega_{n_k}-S\omega_{n_k} + \sum_{j=1}^N \mathbf{A}_j^*(\text{Id}-T_j)\mathbf{A}_j\omega_{n_k}\|^2} = 0. \quad (20)$$

注意到

$$\begin{aligned} &\frac{(\|\omega_n-S\omega_n\|^2 + \sum_{j=1}^N \|(\text{Id}-T_j)\mathbf{A}_j\omega_n\|^2)^2}{\|\omega_n-S\omega_n + \sum_{j=1}^N \mathbf{A}_j^*(\text{Id}-T_j)\mathbf{A}_j\omega_n\|^2} \geq \\ &\quad \frac{(\|\omega_n-S\omega_n\|^2 + \sum_{j=1}^N \|(\text{Id}-T_j)\mathbf{A}_j\omega_n\|^2)^2}{2\max_j\{1, 2^{N-1}\|\mathbf{A}_j\|^2\}(\|\omega_n-S\omega_n\|^2 + \sum_{j=1}^N \|(\text{Id}-T_j)\mathbf{A}_j\omega_n\|^2)} = \\ &\quad \frac{\|\omega_n-S\omega_n\|^2 + \sum_{j=1}^N \|(\text{Id}-T_j)\mathbf{A}_j\omega_n\|^2}{2\max_j\{1, 2^{N-1}\|\mathbf{A}_j\|^2\}}. \end{aligned} \quad (21)$$

根据式(20)和(21)可以得到

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|w_{n_k} - Sw_{n_k}\|^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \|(\text{Id} - T_j)A_j w_{n_k}\|^2 = 0, \tag{22}$$

实际上,根据 $\{w_n\}$ 的定义,有 $\|x_n - w_n\| \rightarrow 0$. 令 $z_n = w_n - \gamma \tau_n y_n$, 得到

$$\begin{aligned} \|w_{n_k} - z_{n_k}\| &= \|w_{n_k} - w_{n_k} + \gamma \tau_{n_k} y_{n_k}\| = \gamma \tau_{n_k} \|y_{n_k}\| = \\ &\gamma \frac{\|w_{n_k} - Sw_{n_k}\|^2 + \sum_{j=1}^N \|(\text{Id} - T_j)A_j w_{n_k}\|^2}{\|w_{n_k} - Sw_{n_k} + \sum_{j=1}^N A_j^* (\text{Id} - T_j)A_j w_{n_k}\|} \rightarrow 0 \quad \text{当 } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

这意味着

$$\|x_{n_k} - z_{n_k}\| \rightarrow 0 \quad \text{当 } k \rightarrow \infty. \tag{23}$$

根据式(23),有

$$\begin{aligned} \|x_{n_k+1} - x_{n_k}\| &= \|\alpha_{n_k} u + (1 - \alpha_{n_k})z_{n_k} - x_{n_k}\| = \|\alpha_{n_k}(u - x_{n_k}) + (1 - \\ &\alpha_{n_k})(z_{n_k} - x_{n_k})\| \leq \alpha_{n_k} \|x_{n_k} - u\| + \|x_{n_k} - z_{n_k}\| \rightarrow 0 \quad \text{当 } k \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{24}$$

由于 $\{x_n\}$ 是有界的,故其存在若收敛的子序列,不失一般性假设 $x_{n_k} \rightharpoonup \bar{x}$. 根据式(22),以及 $\text{Id} - S$ 与 $\text{Id} - T_j$ 在 0 处的次闭性,可以得到 $\bar{x} \in \Omega$. 根据式(24),有

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} b_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} 2\langle u - p, x_{n_k+1} - p \rangle = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} 2\langle u - p, x_{n_k} - p \rangle = 2\langle u - p, \bar{x} - p \rangle \leq 0.$$

因此,根据引理 1 和引理 2,序列 $\{x_n\}$ 强收敛到 $P_\Omega(u)$.

参 考 文 献

- [1] Censor Y, Elfving T. A multiprojection algorithm using Bregman projections in a product space[J]. Numer Algorithms, 1994, 8(2/3/4): 221-239.
- [2] Byrne C. Iterative oblique projection onto convex sets and the split feasibility problem[J]. Inverse Probl, 2002, 18(2): 441-453.
- [3] Byrne C. A unified treatment of some iterative algorithms in signal processing and image reconstruction[J]. Inverse Probl, 2004, 20(1): 103-120.
- [4] Cui H, Wang F. Iterative methods for the split common fixed point problem in Hilbert spaces[J]. Fixed Point Theory Appl, 2014(1): 1-8.
- [5] Boikanyo O A. A strongly convergent algorithm for the split common fixed point problem[J]. Appl Math Comput, 2015, 265: 844-853.
- [6] Yao Y, Liou Y C, Postolache M. Self-adaptive algorithms for the split problem of the demicontractive operators[J]. Optim, 2018, 67(9): 1309-1319.
- [7] Moudafi A. The split common fixed-point problem for demicontractive mappings[J]. Inverse Probl, 2010, 26(5): 055007.
- [8] Censor Y, Segal A. The split common fixed point problem for directed operators[J]. J Convex Anal, 2009, 16(2): 587-600.
- [9] Wang F. A new iterative method for the split common fixed point problem in Hilbert spaces[J]. Optim, 2017, 66(3): 407-415.
- [10] Cui H, Wang F. The split common fixed point problem with multiple output sets for demicontractive mappings[J]. Optim, 2024, 73(6): 1933-1947.
- [11] Mu Z, Peng Y. A note on the inertial proximal point method[J]. Stat Optim Inf Comput, 2015, 3(3): 241-248.
- [12] Liang J. Convergence rates of first-order operator splitting methods[D]. Rouen: Normandie Université, 2016.
- [13] Wang F, Pham H. Improvement of convergence criteria for finding common fixed points of multiple finite demicontractive mappings[J]. Optim Lett, 2026, 20(1): 53-65.

Strongly convergent methods for the split common fixed point problem with multiple output sets

Wang Fenghui^{1,2}, Shang Xiaomeng¹, Zhang Li², Zhao Haochen³

(1. School of Mathematics and Statistics, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China; 2. School of Mathematical Sciences, Luoyang Normal University, Luoyang 471934, China; 3. School of Mechanical Engineering, Zhengzhou University of Aeronautics, Zhengzhou 450046, China)

Abstract: This paper proposes a novel multi-step alternating inertial iterative algorithm for the split common fixed point problem with multiple-output sets of a family of demi-contractive operators. Under appropriate conditions, a strong convergence theorem for the sequence generated by this algorithm is established. The algorithm integrates multi-step inertial acceleration techniques with an adaptive step size strategy, enabling it to flexibly adapt to various computational scenarios and enhance iterative stability and convergence efficiency.

Keywords: fixed point; demicontractive mapping; demiclosedness

[责任编辑 陈留院 杨浦]