

具有饱和感染率的脉冲控制 SIR 模型的全局动力学分析

谢栋梁,焦彩霞,黄嵩,李永凤

(郑州轻工业大学 数学与信息科学学院,郑州 450002)

摘要:研究了一类具有饱和感染率的状态依赖脉冲控制的 SIR 模型,给出了基础模型平衡点的具体表达式及其稳定性的条件,讨论了具有脉冲控制的模型的无病周期解的存在性和全局稳定性,分析了 Poincaré 映射的性质,然后讨论了无病周期解处的分岔现象.最终通过数值模拟,验证了结论的正确性.

关键词:传染病;SIR 模型;饱和感染率;脉冲疫苗接种;分岔

中图分类号:O175.2

文献标志码:A

文章编号:1000-2367(2025)05-0097-08

进入 21 世纪以来,全球范围内多次暴发传染病,一系列突发公共卫生事件引起了国际社会的关注,并对人口健康、经济和社会发展产生了深远影响.随着社会经济的增长和生态环境的变化,新发和再发传染病不断涌现,持续威胁全球公共卫生.例如,COVID-19 疫情、埃博拉病毒、西尼罗河病毒、寨卡病毒等传染病对人类健康构成了严重挑战^[1-2].因此,建立合适的传染病数学模型,研究其动态特性和传播规律,并据此制定有效的防控策略,已成为至关重要的任务^[3].

疫苗接种是预防和控制各种传染病的重要方法,已经取得了显著成效,例如成功消灭了天花^[4]和大幅减少了麻疹的发病率^[5].传统的疫苗接种通常以连续的方式进行,许多研究认为这是控制疾病传播的有效策略^[6].然而,常规连续接种在应对疾病迅速传播的情况下可能不足以迅速遏制疫情.为此,脉冲疫苗接种策略逐渐引起人们的关注.这种策略通过定期或不定期的脉冲接种,能够在短时间内迅速提高免疫覆盖率,特别适用于应对高传染性、快速传播的疾病.

脉冲疫苗接种的理论研究最早由 AGUR 等^[7]提出.此后,众多研究者研究了一系列脉冲疫苗接种模型^[8].先前的研究很多都将疫苗接种假设在固定的离散时间进行^[9],这符合实际中非连续定期实施干预措施的做法.然而,这种固定时刻的脉冲方式没有考虑到传染病的流行对干预措施的影响,可能导致医疗资源的浪费.因此,基于感染者或易感者数量来决定干预措施的实施时间可能更符合实际.

在传染病模型中,感染率是一个关键参数,常见的形式包括双线性感染率 βSI ^[10]、标准感染率^[11] $\beta \frac{SI}{N}$ (其中 N 为总人口数) 和饱和感染率^[12] $\frac{\beta SI}{1 + \alpha S}$ 等.当易感者人数较多时,与感染者接触的易感者不会无限增大,感染率不会无限增长,而是趋于一个定值,也就是说,易感者与患病者之间的有效接触会趋于饱和状态,此时采用饱和感染率 $\frac{\beta SI}{1 + \alpha S}$ 这种形式,更能准确地揭示真实情形.

收稿日期:2024-07-27;**修回日期:**2024-08-22.

基金项目:国家自然科学基金(12471459);河南省自然科学基金(252300420352).

作者简介:谢栋梁(1979—),男,河南南阳人,郑州轻工业大学讲师,研究方向为生物数学.

作者简介(通信作者):李永凤(1980—),女,河南商丘人,郑州轻工业大学教授,博士,研究方向为生物数学,E-mail: yfli2003@163.com.

引用本文:谢栋梁,焦彩霞,黄嵩,等.具有饱和感染率的脉冲控制 SIR 模型的全局动力学分析[J].河南师范大学学报(自然科学版),2025,53(5):97-104.(Xie Dongliang, Jiao Caixia, Huang Song, et al. Dynamic analysis of a state-dependent feedback control SIR model with saturation incidence[J]. Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition), 2025, 53(5): 97-104. DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2024.07.27.0002.)

提出一类更能反映上述背景的具有饱和感染率 $\frac{\beta SI}{1+\alpha S}$ 的状态依赖反馈控制 SIR 模型,即考虑当易感者规模达到某个临界值时,采取综合控制策略,如对易感者进行脉冲接种,对感染者进行脉冲治疗,更有效地控制疾病传播,最大限度地减少感染人数.该模型中,控制措施的具体实施时间和强度取决于易感人群的阈值水平 S_t .文中定义了基本再生数 R_0 和控制再生数 R_c ,并分析了 R_0 对 R_c 的影响.同时证明了无病周期解的全局稳定性,并利用离散单参数族映射的分岔理论探讨了系统中可能出现的分岔现象.最后,通过数值模拟验证了所得结论.

1 模型构建

考虑具有饱和感染率的 SIR 传染病模型:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \frac{\beta SI}{1+\alpha S} - \delta S, \\ \frac{dI(t)}{dt} = \frac{\beta SI}{1+\alpha S} - \gamma I - \delta I, \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I - \delta R. \end{cases} \tag{1}$$

其中 Λ 为出生率, δ 为死亡率, γ 为恢复率, β 为传播率, α 为半饱和常数, 记 $q = \gamma + \delta$, $K = \frac{\Lambda}{\delta}$. $S(t)$ 、 $I(t)$ 和 $R(t)$ 分别为 t 时刻的易感者、感染者和康复者, $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$ 为总人口, 可将其看作一个常数. 考虑康复者 $R(t)$ 不会二次感染, 那么模型(1)变为

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \frac{\beta SI}{1+\alpha S} - \delta S, \\ \frac{dI(t)}{dt} = \frac{\beta SI}{1+\alpha S} - \gamma I - \delta I. \end{cases} \tag{2}$$

定义基本再生数 $R_0 = \frac{\Lambda(\beta - \alpha q)}{\delta q}$, 有如下引理.

引理 1 模型(2)总有无病平衡点 $E_0 = (K, 0)$, 当 $R_0 \leq 1$ 时, E_0 为一个稳定的结点.

引理 2 模型(2)在 $R_0 > 1$ 时, 有唯一的地方病平衡点 $E^*(S^*, I^*)$, 其中 $S^* = \frac{q}{\beta - \alpha q}$, $I^* =$

$$\frac{\Lambda(\beta - \alpha q) - \delta q}{q(\beta - \alpha q)}.$$

引理 3 当 $R_0 \in (1, R_1] \cup [R_2, +\infty)$ 时, $E^*(S^*, I^*)$ 是一个稳定的结点; 当 $R_0 \in (R_1, R_2)$ 时, $E^*(S^*, I^*)$ 是一个稳定的焦点. 其中,

$$R_1 = 1 - \frac{\beta(2\delta - 4q) + 4\beta\sqrt{q(q - \delta)}}{2\delta(\beta - \alpha q)}, R_2 = 1 - \frac{\beta(2\delta - 4q) - 4\beta\sqrt{q(q - \delta)}}{2\delta(\beta - \alpha q)}.$$

2 Poincaré 映射及其性质

当易感者规模达到阈值 S_t 时实施综合控制策略, 系统(2)引入如下脉冲控制措施

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \frac{\beta SI}{1+\alpha S} - \delta S, \\ \frac{dI(t)}{dt} = \frac{\beta SI}{1+\alpha S} - \gamma I - \delta I, \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \frac{\beta SI}{1+\alpha S} - \delta S, \\ \frac{dI(t)}{dt} = \frac{\beta SI}{1+\alpha S} - \gamma I - \delta I, \end{cases}} \right\} S(t) < S_t, \tag{3}$$
$$\begin{cases} S(t^+) = (1 - \eta_1)S(t), \\ I(t^+) = (1 - \eta_2)I(t), \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} S(t^+) = (1 - \eta_1)S(t), \\ I(t^+) = (1 - \eta_2)I(t), \end{cases}} \right\} S(t) = S_t,$$

其中 $\eta_1 \in [0, 1]$ 为最大疫苗接种率, $\eta_2 \in [0, 1]$ 为最大治疗率.

对于系统(2)定义等倾线为: $l_1: S = \frac{q}{\beta - \alpha q}, l_2: I = \frac{(\Lambda - \delta S)(1 + \alpha S)}{\beta S}$. 令 $l_3: S = S_t, l_4: S = S_q$,

其中 $S_q = (1 - \eta_1)S_t$.

定义以下两个集合 $V_{S_t} = \{(S, I) \mid S = S_t, I \geq 0\}, V_{S_q} = \{(S, I) \mid S = S_q, I \geq 0\}$.

易知初始点 $P_k^+ = (S_q, I_k^+) \in V_{S_q}$ 在时刻 t 到达点 $P_{k+1} = (S_t, I_{k+1}) \in V_{S_t}$ 处, 且 $P_{k+1}^+ = (S_q, I_{k+1}^+) \in V_{S_q}$. 可以用 I_k^+ 来定义 I_{k+1} , 即 $I_{k+1} = P(I_k^+)$. 如果在点 P_{k+1} 处发生脉冲, 则有 $P_{k+1}^+ = (S_q, I_{k+1}^+)$, 其中 $I_{k+1}^+ = (1 - \eta_2)I_{k+1}$. 因此, Poincaré 映射 P_M 可以定义为: $P_M(I_k^+) = P(I_k^+) + B(I_{k+1}) = I_{k+1}^+$, 其中 $B(I_{k+1}) = -\eta_2 I_{k+1}$.

定义模型(3)的脉冲集为 $M = \{(S, I) \mid S = S_t, 0 \leq I \leq I_m\}$, 若 $R_0 \leq 1$, 则 $I_m = P(I_{S_q})$. 定义连续函数为 $H: (S_t, I) \in M \rightarrow (S^+, I^+) = (S_q, (1 - \eta_2)I) \in R_+^2$. 令 $h(I) = (1 - \eta_2)I$, 定义相集 $N = H(M) = \{(S^+, I^+) \mid S^+ = S_q, 0 \leq I^+ \leq h(I_m)\}$.

令 $P(S(t), I(t)) = \Lambda - \frac{\beta SI}{1 + \alpha S} - \delta S, Q(S(t), I(t)) = \frac{\beta SI}{1 + \alpha S} - \gamma I - \delta I$, 可得:

$$\begin{cases} \frac{dI}{dS} = \frac{\frac{\beta SI}{1 + \alpha S} - qI}{\Lambda - \frac{\beta SI}{1 + \alpha S} - \delta S} = G(S, I), \\ I(S_q) = I_0^+. \end{cases} \quad (4)$$

针对模型(3), 重点关注以下区域: $\Omega = \{(S, I) \mid S > 0, I > 0, I < \frac{(\Lambda - \delta S)(1 + \alpha S)}{\beta S}\}$. 定义 $I_0^+ = Y$, 其

中 $Y \in N$ 并且 $Y < I_{S_q}$, 即 $(S_0^+, Y) \in \Omega$, 则 $I(S) = I(S; S_q, Y) = I(S, Y), I(S, Y) = Y + \int_{S_q}^S G(x, I(x, Y))dx$, 其中 $S_q \leq S \leq S_t$. 故 Ω 中的 Poincaré 映射 P_M 具有形式 $P_M(I_k^+) = I_{k+1}^+ = I(S_t, I_k^+) + B(I(S_t, I_k^+))$, $P_M(Y) = I(S_t, Y) + B(I(S_t, Y)) = h(I(S_t, Y))$.

定理 1 系统(3)在 $R_0 \leq 1$ 时, 其 Poincaré 映射 P_M 的递增和递减区间分别为 $[0, I_{S_q}]$ 和 $[I_{S_q}, +\infty]$, 并且 P_M 在区间 $[0, I_{S_q}]$ 上是凹的.

证明 由式(4)可得 $\frac{\partial G(S, I)}{\partial I} = \frac{(\Lambda - \delta S)(1 + \alpha S)(\beta S - q(1 + \alpha S))}{((\Lambda - \delta S)(1 + \alpha S) - \beta SI)^2}$ 以及 $\frac{\partial^2 G(S, I)}{\partial I^2} = \frac{2\beta S(\Lambda - \delta S)(1 + \alpha S)(\beta S - q(1 + \alpha S))}{((\Lambda - \delta S)(1 + \alpha S) - \beta SI)^3}$. 如果 $R_0 \leq 1$ 并且 $S_q \leq S_t < K$, 则当 $I < I_{S_q}$ 时, 有 $\frac{\partial G(S, I)}{\partial I} < 0$ 和 $\frac{\partial^2 G(S, I)}{\partial I^2} < 0$. 由柯西-利普希茨参数定理知: $\frac{\partial I(S, Y)}{\partial Y} = \exp(\int_{S_q}^S \frac{\partial}{\partial I} G(x, I(x, Y))dx) > 0, \frac{\partial^2 I(S, Y)}{\partial Y^2} = \exp(\int_{S_q}^S \frac{\partial}{\partial I} G(x, I(x, Y))dx) \cdot \int_{S_q}^S \frac{\partial^2}{\partial I^2} G(x, I(x, Y)) \frac{\partial I(x, Y)}{\partial Y} dx < 0$. 此外, 由 $P_M(Y) = (1 - \eta_2)I(S_t, Y) = h(I(S_t, Y))$ 有 $\frac{\partial P_M(Y)}{\partial Y} = (1 - \eta_2) \exp(\int_{S_q}^{S_t} \frac{\partial}{\partial I} G(x, I(x, Y))dx) = h'(I(S_t, Y)) \exp(\int_{S_q}^{S_t} \frac{\partial}{\partial I} G(x, I(x, Y))dx)$, 且 $\frac{\partial^2 P_M(Y)}{\partial Y^2} = h'(I(S_t, Y)) \exp(\int_{S_q}^{S_t} \frac{\partial}{\partial I} G(x, I(x, Y))dx) \int_{S_q}^{S_t} \frac{\partial^2}{\partial I^2} G(x, I(x, Y)) \frac{\partial I(x, Y)}{\partial Y} dx$. 显然 $h'(I(S_t, Y)) > 0$. 若 $Y \in (0, I_{S_q}]$, 则 $\frac{\partial P_M(Y)}{\partial Y} > 0$ 且 $\frac{\partial^2 P_M(Y)}{\partial Y^2} < 0$, 即 $P_M(Y)$ 连续可微在 $(0, I_{S_q}]$ 上凹. 另外, 也可得 $P_M(Y)$ 在区间 $(0, I_{S_q}]$ 和 $(I_{S_q}, +\infty)$ 上单增和单减.

令 $I(t) = 0$ 得系统(3)的无病子系统

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \delta S, S(t) < S_t, \\ S(t^+) = (1 - \eta_1)S(t), S(t) = S_t. \end{cases} \quad (5)$$

记初始值 $S_0 = S(0^+) = S_q$, 可得周期解 $S^T(t) = K + (S_q - K)\exp(-\delta t)$. 当 $S(t)$ 在 T 时刻与直线 l_3 相交时, 有 $S_t = K + (S_q - K)\exp(-\delta T)$. 因此, $T = -\frac{1}{\delta} \ln(\frac{K - S_t}{K - S_q})$, 记模型(3)的周期解为 $(S^T(t), 0)$, 则有以下结论.

定理 2 当 $R_0 \leq 1$ 时, 模型(3)的无病周期解 $(S^T(t), 0)$ 是全局渐近稳定的.

证明 令 $\phi(S, I) = S - S_t$, $\alpha(S, I) = -\eta_1 S$, $\beta(S, I) = -\eta_2 I$. 则 $\frac{\partial \beta}{\partial I} \frac{\partial \phi}{\partial S} - \frac{\partial \beta}{\partial S} \frac{\partial \phi}{\partial I} + \frac{\partial \phi}{\partial S} = 1 - \eta_2$, $\frac{\partial \alpha}{\partial S} \frac{\partial \phi}{\partial I} - \frac{\partial \alpha}{\partial I} \frac{\partial \phi}{\partial S} + \frac{\partial \phi}{\partial I} = 0$, 且 $\Delta_1 = \frac{(1 - \eta_2)P_+}{P} = \frac{(1 - \eta_2)(K - S_q)}{K - S_t}$. 因此 $\int_0^T (\frac{\partial P}{\partial S} + \frac{\partial Q}{\partial I}) dt = \int_0^T (\frac{\beta S^T(t)}{1 + \alpha S^T(t)} - \delta - q) dt = J_1 + J_2 + J_3$, 其中, $J_1 = -\frac{\beta}{\Lambda\alpha + \delta} (\frac{1}{\delta} \ln \frac{1 + \alpha S_t}{1 + \alpha S_q} + K \ln \frac{K - S_t}{K - S_q})$, $J_2 = \ln \frac{K - S_t}{K - S_q}$, $J_3 = \frac{q}{\delta} \ln \frac{K - S_t}{K - S_q}$. 进一步有 $|\mu_2| = (1 - \eta_2) \frac{K - S_q}{K - S_t} \exp(J_1 + J_2 + J_3) = (1 - \eta_2) \exp(J_1 + J_3)$.

下证 $|\mu_2| < 1$, 即 $J_1 + J_3 < 0$. 显然若 $R_0 \leq 1$, 则 $J_3 < 0$. 而 J_1 的符号不易判定, 由于 $J_1 + J_3 = -\frac{1}{\Lambda\alpha + \delta} [\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{1 + \alpha S_t}{1 + \alpha S_q} + q(R_0 - 1) \ln \frac{K - S_t}{K - S_q}]$, 则当 $R_0 \leq 1$ 时, 有 $|\mu_2| < 1$, 即系统(3)的无病周期解 $(S^T(t), 0)$ 是轨道渐近稳定的.

对于 $k \geq 0$, 假设 $I_k^+ \in [0, S_q]$ 且脉冲点序列 I_k^+ 在直线 l_4 上. 当 $R_0 \leq 1$ 且 $S \leq S_t < K$ 时, 有 $\frac{dI}{dt} < 0$. 那么, 则脉冲点序列 I_k^+ 是严格递减的, 存在 $\lim_{k \rightarrow +\infty} I_k^+ = I_0$. 此外, 对于 $S \leq S_t$, 有 $\frac{dI}{dt} < 0$ 成立, 那么一定有 $I_0 = 0$. 因此, 系统(3)的无病周期解 $(S^T(t), 0)$ 是全局吸引的.

根据定理 2 的证明可知当 $R_0 < 1$ 时有 $\mu_2 < 1$. 因此, 如果系统(2)不存在地方病平衡点, 则系统(3)的无病周期解 $(S^T(t), 0)$ 是全局稳定的. 那么, 可以用乘子 μ_2 表示控制再生数, 记为 $R_c = (1 - \eta_2) \exp(J_1 + J_3)$.

基本再生数 R_0 是在没有任何干预措施的情况下, 传染病在完全易感人群中的传播能力. 它反映了疾病在不受干预的条件下传播的潜在强度. 而控制再生数 R_c 是在考虑了干预措施的前提下, 衡量疾病传播能力的指标. 当 $R_0 \leq 1$ 时, 控制基本再生数 R_c 恒小于 1, 并且随着阈值 S_t 增加而逐渐下降, 最终降至低于 R_0 的水平. 这意味着, 在阈值 S_t 处实施综合控制策略将获得最佳控制结果. 当 $R_0 > 1$ 时, 控制再生数 R_c 会呈现出复杂的趋势. 随着 S_t 的增大, R_c 可能会超过 1, 从而系统出现分叉. 此时若想控制效果达到最佳, 可以将控制阈值取为 R_c 变化的最低点对应的 S_t 的值.

3 系统(3)的分岔现象

首先, 将 R_c 视作为 η_1 的函数, 考虑 $P_M(Y, \eta_1)$ 关于 η_1 的分岔. 易知 $R_c(\eta_1) = (1 - \eta_2) \exp(J_{13}(\eta_1))$, 其中 $J_{13}(\eta_1) = J_1 + J_3 = -\frac{1}{\Lambda\alpha + \delta} [\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{1 + \alpha S_t}{1 + \alpha S_q} + q(R_0 - 1) \ln \frac{K - S_t}{K - S_q}]$, 且 $S_q = (1 - \eta_1)S_t$. 将 $R_c(\eta_1)$ 对 η_1 求导得 $\frac{dR_c(\eta_1)}{d\eta_1} = -S_t(1 - \eta_2) \exp(J_{13}(\eta_1)) (\frac{\beta}{(\Lambda\alpha + \delta)(1 + \alpha S_q)} + \frac{q(\Lambda\alpha + \delta) - \Lambda\beta}{\delta(\Lambda\alpha + \delta)(K - S_q)})$. 易知, 方程 $\frac{dR_c(\eta_1)}{d\eta_1} = 0$ 有一个唯一解 $S_q = S^*$. 因此, 一定存在 $\bar{\eta}_1 = 1 - \frac{S^*}{S_t}$, 且 $\frac{dR_c(\bar{\eta}_1)}{d\eta_1} = 0$. 当 $\eta_1 \in (0, \bar{\eta}_1)$ 时, 有 $S^* < S_q$, 则 $\frac{dR_c(\eta_1)}{d\eta_1} > 0$; 当 $\eta_1 \in (\bar{\eta}_1, 1)$, 有 $S^* > S_q$, 则 $\frac{dR_c(\eta_1)}{d\eta_1} < 0$. 因此, 若 $R_c(\bar{\eta}_1) > 1$, 则存在 $\eta_1^* \in (0, \bar{\eta}_1) = 1$ 使得 $R_c(\eta_1^*) = 1$; 若 $R_c(1) < 1$, 则存在 $\eta_1^{**} \in (\bar{\eta}_1, 1)$ 使得 $R_c(\eta_1^{**}) = 1$.

定理 3 若 $S^* < S_t < K$, $R_c(1) < 1$ 且 $R_c(\bar{\eta}_1) > 1$, 那么在 $\eta_1 = \eta_1^*$ 和 $\eta_1 = \eta_1^{**}$ 处 $P_M(Y, \eta_1)$ 发生

跨临界分岔现象,这表明当 η_1 减小并低于 η_1^* 或增加并超过 η_1^{**} 时, $P_M(Y, \eta_1)$ 出现不稳定的正不动点.即存在 $\epsilon > 0$ 足够小,使得当 $\eta_1 \in (\eta_1^* - \epsilon, \eta_1^*) \cup (\eta_1^{**}, \eta_1^{**} + \epsilon)$ 时,模型(3)出现不稳定的正周期解.

证明 由于 $I(S; S_q, Y) = I(S, Y)$, 那么 $P_M(Y, \eta_1) = I(S_t, Y)$. 显然 $P_M(0, \eta_1) = I(S_h, 0) = 0$, 满足了引理 A.2^[13] 的第1个条件. 由定理1的证明可知 $\frac{\partial P_M(0, \eta_1)}{\partial Y} = (1 - \eta_2) \exp(J_{13}(\eta_1)) = R_c(\eta_1)$, 则 $\frac{\partial P_M(0, \eta_1^*)}{\partial Y} = R_c(\eta_1^*) = 1$, 满足了引理 A.2^[13] 的第2个条件. 此外 $\frac{\partial P_M(0, \eta_1)}{\partial Y \partial \eta_1} = \frac{dR_c(\eta_1)}{d\eta_1}$ 表明 $\frac{\partial^2 P_M(0, \eta_1^*)}{\partial Y \partial \eta_1} = \frac{dR_c(\eta_1^*)}{d\eta_1} > 0$, 满足了引理 A.2^[13] 的第3个条件.

下面验证引理 A.2^[13] 的第4个条件, 易知 $\frac{\partial^2 P_M(0, \eta_1)}{\partial Y^2} = (1 - \eta_2) \exp(J_{13}) \int_{S_q}^{S_t} \frac{\partial^2}{\partial I^2} G(x, I(x, 0)) \cdot \frac{\partial I(x, 0)}{\partial Y} dx$. 令 $f_1(x) = \int_{S_q}^x \frac{(\beta - \alpha q)x - q}{(\Lambda - \delta x)(1 + \alpha x)} dx$, $z_1(x) = (1 - \eta_2) \exp(f_1(x))$. 显然 $z_1(S_t) = R_c(\eta_1)$ 且 $z_1(S_q) = 1 - \eta_2$. 又 $f_1'(x) = \frac{(\beta - \alpha q)x - q}{(\Lambda - \delta x)(1 + \alpha x)}$. 令 $f_2(x) = \frac{\partial^2}{\partial I^2} G(x, I(x, 0)) = \frac{2\beta x((\beta - \alpha q)x - q)}{((\Lambda - \delta x)(1 + \alpha x))^2}$, $z_2(x) = \frac{f_2(x)}{f_1'(x)} = \frac{2\beta x}{(\Lambda - \delta x)(1 + \alpha x)}$. 若 $\eta_1 = \eta_1^*$, 则 $\frac{\partial^2 P_M(0, \eta_1^*)}{\partial Y^2} = \frac{1}{1 - \eta_2} \int_{S_q}^{S_t} z_2(x) d(z_1(x))$. 由 $f_1(x)$ 的单调性, 可得对于 $x \in [S_q, S^*]$, 函数 $z_1(x)$ 单调递减, 对于 $x \in [S^*, S_t]$ 则反之. 因此 $z_1(S_t) = R_c(\eta_1^*) = 1$ 且 $z_1(S_q) = 1 - \eta_2$, 即对于任意的 $x \in [S_q, S_t]$ 有 $z_1(S^*) < z_1(x) \leq 1$. 此外, 由于 $z_2'(x) = \frac{2\beta(\Lambda + \delta \alpha x^2)}{((\Lambda - \delta x)(1 + \alpha x))^2} > 0$, 则 $z_2(x)$ 在 $[S_q, S_t]$ 上单调递增. 进一步有 $\int_{S_q}^{S_t} z_2(x) d(z_1(x)) > z_2(S_t) - z_2(S_q) - \int_{S_q}^{S_t} z_1(x) d(z_2(x))$. 由于 $z_2(S_t) - z_2(S_q) - \int_{S_q}^{S_t} z_1(x) d(z_2(x)) = \int_{S_q}^{S_t} (1 - z_1(x)) z_2'(x) dx$, 则 $\frac{\partial^2 P_M(0, \eta_1^*)}{\partial Y^2} > 0$. 类似可以得出 $\frac{\partial^2 P_M(0, \eta_1^{**})}{\partial Y^2} > 0$, 证毕.

接下来, 将 R_c 视作为 S_t 的函数, 考虑 $P_M(Y, \eta_1)$ 关于 S_t 的分岔. 易知 $R_c(S_t) = (1 - \eta_2) \exp(J_{13}(S_t))$, 其中 $J_{13}(S_t) = -\frac{1}{\Lambda \alpha + \delta} [\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{1 + \alpha S_t}{1 + \alpha S_q} + q(R_0 - 1) \ln \frac{K - S_t}{K - S_q}]$. 计算可得 $\frac{dJ_{13}(S_t)}{dS_t} = \frac{(\beta - \alpha q)S_t - q}{(1 + \alpha S_t)(\Lambda - \delta S_t)} - (1 - \eta_1) \frac{(\beta - \alpha q)S_q - q}{(1 + \alpha S_q)(\Lambda - \delta S_q)}$, $\frac{dR_c(S_t)}{dS_t} = (1 - \eta_2) \exp(J_{13}(S_t)) \frac{dJ_{13}(S_t)}{dS_t}$. 令 $\nu(s) = \frac{(\beta - \alpha q)s - q}{(1 + \alpha s)(\Lambda - \delta s)}$, 则 $\frac{dJ_{13}(S_t)}{dS_t} = \nu(S_t) - (1 - \eta_1)\nu(S_q)$. 若 $S_q \leq S^*$, 则 $\nu(S_q) \leq 0$, 又 $\frac{dJ_{13}(S_t)}{dS_t} > 0$. 若 $S_q > S^*$, 则 $\nu(S_q) > 0$, 又有 $\nu'(s) = \frac{(\beta - \alpha q)[\alpha \delta s^2 - 2\alpha \delta S^* s + (\alpha \Lambda - \delta)S^* + \Lambda]}{[(1 + \alpha s)(\Lambda - \delta s)]^2}$. 当 $R_0 > 1$ 即 $-\frac{1}{\alpha} < S^* < K$, $(\alpha \delta s^2 - 2\alpha \delta S^* s + (\alpha \Lambda - \delta)S^* + \Lambda) \geq (-\alpha \delta (S^*)^2 + (\alpha \Lambda - \delta)S^* + \Lambda) > 0$, 因此 $\nu'(s) > 0$. 从而 $\frac{dJ_{13}(S_t)}{dS_t} > \nu(S_q) - (1 - \eta_1)\nu(S_q) > 0$.

另外, 由于 $\lim_{S_t \rightarrow S^*} J_{13}(S_t) = \lim_{S_t \rightarrow S^*} \int_{S_q}^{S_t} \nu(s) ds = \int_{(1-\eta_1)S^*}^{S_t} \nu(s) ds < 0$, $\lim_{S_t \rightarrow K} J_{13}(S_t) = \lim_{S_t \rightarrow K} [-\frac{1}{\Lambda \alpha + \delta} (\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{1 + \alpha S_t}{1 + \alpha S_q} + q(R_0 - 1) \ln \frac{K - S_t}{K - S_q})] = +\infty$, $\frac{\partial^2 P_M(0, S_t)}{\partial Y \partial S_t} = \frac{dR_c(S_t)}{dS_t} > 0$, 因此有 $J_{13}(S_t^*) = \ln \frac{1}{1 - \eta_2}$, 其中 $S_t^* \in (S^*, K)$. 因此, 根据 $\frac{\partial^2 P_M(0, S_t^*)}{\partial Y^2} > 0$ 和引理 A.2^[13] 可得下列定理.

定理4 若 $S^* < S_t < K$ 且 $R_0 > 1$, 那么在 $S_t = S_t^*$ 处 $P_M(Y, S_t)$ 会发生跨临界分岔现象, 这表明当

S_t 减小并低于 S_t^* 时, $P_M(Y, \eta_1)$ 会出现一个不稳定的正不动点. 也就是说, 存在 $\epsilon > 0$ 足够小, 使得当 $S_t \in (S_t^* - \epsilon, S_t^*)$ 时, 模型(3)会出现不稳定的正周期解.

4 数值模拟

本节将给出系统(3)的数值模拟. 令 $\Lambda = 1, \eta_1 = 0.2, \Lambda = 2.5, \eta_1 = 0.5$, 且令 $\beta = 0.015, \alpha = 0.001, \delta = 0.08, \gamma = 0.3, \eta_2 = 0.1$, (6) 可得图 1 结果. 从图 1 可以看出, 当 $R_0 \leq 1$ 时, 控制基本再生数 R_c 恒小于 1, 并且随着阈值 S_t 增加而逐渐下降, 最终降至低于 R_0 的水平. 当 $R_0 > 1$ 时, 控制再生数 R_c 呈现出更复杂的趋势. 此时, R_c 不再与阈值 S_t 呈现单调关系. 随着 S_t 的增大, R_c 超过 1, 但会出现一个最小值. 这说明若想使控制效果达到最佳, 可以将控制阈值取为 R_c 变化的最低点对应的 S_t 的值.

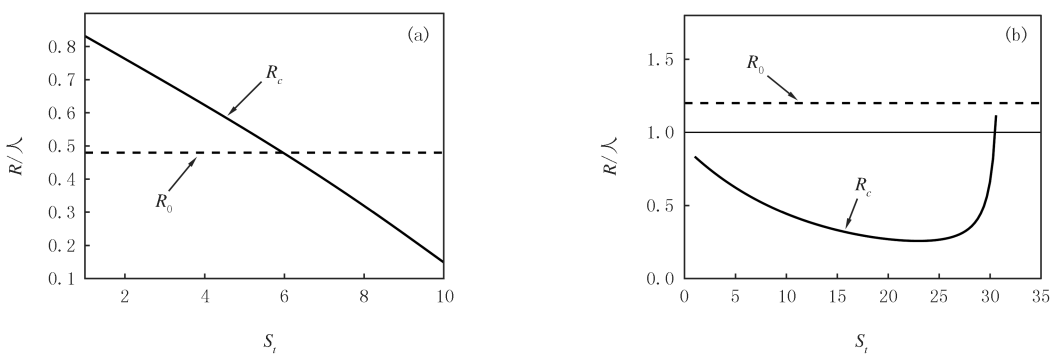


图1 不同条件下 R_0 对 R_c 的影响
Fig.1 The effect of R_0 on R_c under different conditions

若取 $\Lambda = 1, \eta_1 = 0.2, S_t = 6.78$ 和 $\Lambda = 2.5, \eta_1 = 0.4, S_t = 27.5$, 其他参数同式(6), 可以得到图 2. 图 2(a) 满足定理 2 的条件, 可以看出系统(3)的无病周期解是全局渐近稳定的. 此外, 从图 2(b) 可以看出, 当 $R_0 > 1$ 时, 地方病平衡点 E^* 和无病周期解稳定共存.

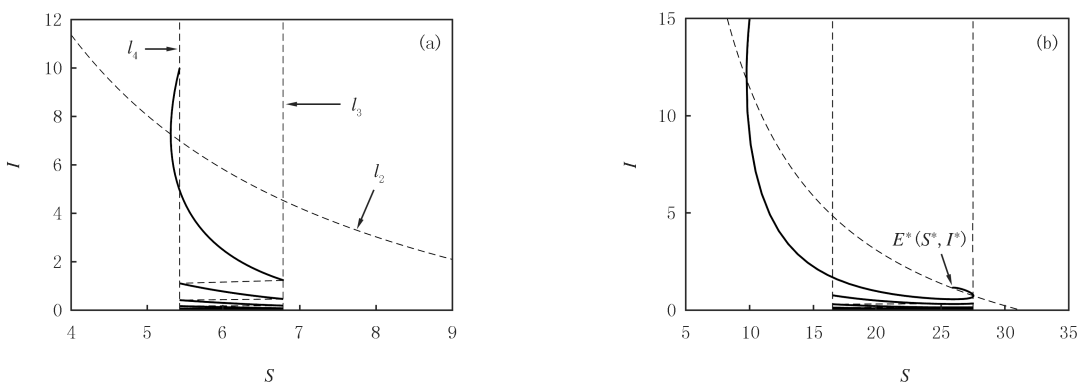


图2 系统(3)的动力学行为
Fig.2 Dynamical behavior of system (3)

若取 $\Lambda = 2.5, \eta_1 = 0.2, S_t = 20$, 其他参数同式(6), 可以得到图 3. 可以看出, 系统在无脉冲控制的情况下会靠近平衡点 $E^*(S^*, I^*)$ 从而导致疾病持久, 而在实时控制的情况下, 疾病可以消灭.

若分别取 $\Lambda = 2.2, \eta_2 = 0.08, S_t = 27$ 和 $\Lambda = 2.5, \eta_1 = 0.2$, 其他参数同式(6), 可以得到图 4(a) 和图 4(b). 对于图 4(a), 其参数值满足定理 3 的条件, 此时在 $\eta_1 = \eta_1^*$ 和 $\eta_1 = \eta_1^*$ 处会发生跨临界分岔现象. 对于图 4(b), 其参数值满足定理 4 的条件, 此时在 $S_t = S_t^*$ 处 $P_M(Y, S_t)$ 会发生跨临界分岔现象.

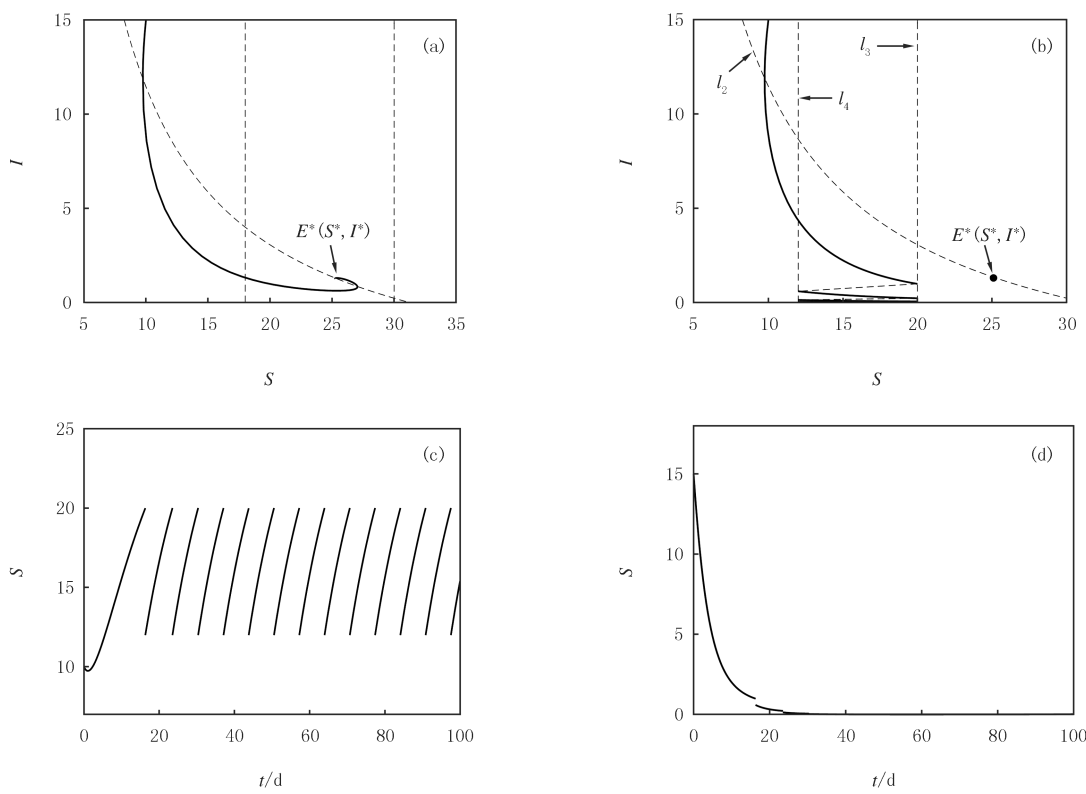


图3 $S_t \leq S^* < K$ 时系统(3)的动力学行为
Fig.3 Dynamical behavior of system(3) when $S_t \leq S^* < K$

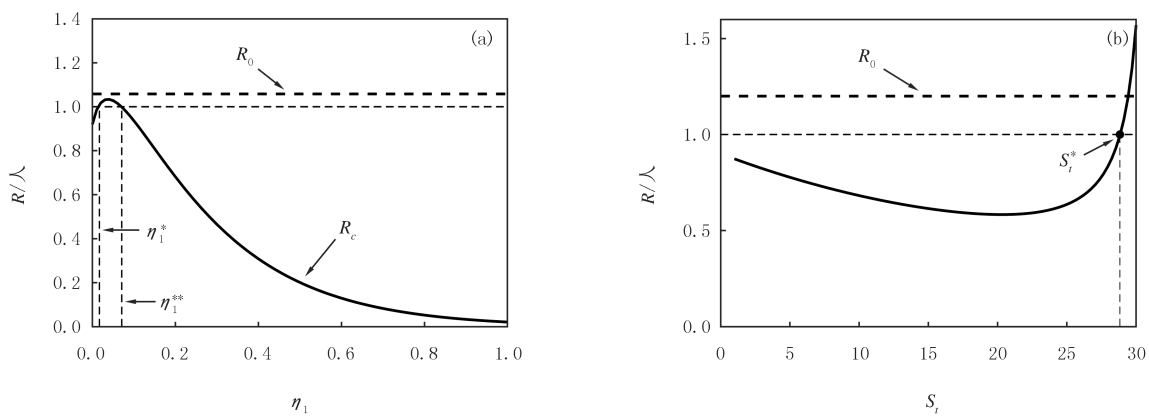


图4 跨临界分岔现象
Fig.4 Transcritical bifurcation phenomenon

5 结束语

本文研究了具有饱和感染率的状态依赖脉冲控制的 SIR 模型,定义了基本再生数 R_0 和控制再生数 R_c ,研究了无病周期解的全局渐近稳定性,分析了 Poincaré 映射的性质并给出它发生跨临界分岔的充分条件.最后利用数值模拟观察了系统丰富的动力学行为,并检验了理论的正确性.本文的研究具有一定的应用性,但模型的简化限制了其在实际事件中的应用.因此,建立一种更复杂更贴合实际的模型是下一步的研究重点.

参 考 文 献

[1] CIOTTI M,CICCOZZI M,TERRINONI A,et al.The COVID-19 pandemic[J].Critical Reviews in Clinical Laboratory Sciences,2020,57(6):365-388.

[2] MUSTAFA M I,MAKHAWI A M.The reemergence of dengue virus in Sudan[J].Journal of Infection and Public Health,2023,16(9):1392-1395.

[3] 谭伟,刘茂省.具有非单调发生率的随机离散 SIR 传染病模型的稳定性[J].河南师范大学学报(自然科学版),2023,51(3):56-65.

TAN W,LIU M X.Stability of stochastic discrete SIR epidemic model with nonmonotonic incidence rate[J].Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition),2023,51(3):56-65.

[4] HENDERSON D A.The eradication of smallpox-An overview of the past,present,and future[J].Vaccine,2011,29:D7-D9.

[5] STREBEL P M,COCHI S L,HOEKSTRA E,et al.A world without measles[J].The Journal of Infectious Diseases,2011,204(suppl_1):S1-S3.

[6] 王晓静,梁宇,郭松柏,等.一类具有疫苗接种的双菌株流感模型的的动力学分析[J].河南师范大学学报(自然科学版),2023,51(3):48-55.

WANG X J,LIANG Y,GUO S B,et al.Dynamic analysis of a two-strain influenza model with vaccination[J].Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition),2023,51(3):48-55.

[7] AGUR Z,COJOCARU L,MAZOR G,et al.Pulse mass measles vaccination across age cohorts[J].Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America,1993,90(24):11698-11702.

[8] TANG S Y,XIAO Y N,CLANCY D.New modelling approach concerning integrated disease control and cost-effectivity[J].Nonlinear Analysis: Theory,Methods & Applications,2005,63(3):439-471.

[9] WANG X,TAO Y D,SONG X Y.Pulse vaccination on SEIR epidemic model with nonlinear incidence rate[J].Applied Mathematics and Computation,2009,210(2):398-404.

[10] BABA I A,HINCAL E.Global stability analysis of two-strain epidemic model with bilinear and non-monotone incidence rates[J].The European Physical Journal Plus,2017,132(5):208.

[11] OMAR F M,SOHALY M A,EL-METWALLY H.Lyapunov functions and global stability analysis for epidemic model with n-infectious[J].Indian Journal of Physics,2024,98(5):1913-1922.

[12] 庞国萍,陈兰荪.具饱和传染率的脉冲免疫接种 SIRS 模型[J].系统科学与数学,2007,27(4):563-572.

PANG G P,CHEN L S.The sirs epidemic model with saturated contact rate and pulse vaccination[J].Journal of Systems Science and Mathematical Sciences,2007,27(4):563-572.

[13] CHENG T Y,TANG S Y,CHEKE R A.Threshold dynamics and bifurcation of a state-dependent feedback nonlinear control susceptible-infected-recovered Model[J].Journal of Computational and Nonlinear Dynamics,2019,14(7):071001.

Dynamic analysis of a state-dependent feedback control *SIR* model with saturation incidence

Xie Dongliang, Jiao Caixia, Huang Song, Li Yongfeng

(Zhengzhou University of Light Industry, School of Mathematics and Information Science, Zhengzhou 450002, China)

Abstract: A state-dependent impulsive control *SIR* model with a saturated infection rate is studied. The expression for the equilibrium points of the base model and the conditions for their stability are given. The existence and global stability of the disease-free periodic solution of the model with impulsive control are discussed. The properties of the Poincaré map are analyzed, and the bifurcation phenomena at the disease-free periodic solution are examined. Finally, the correctness of the conclusions is verified through numerical simulations.

Keywords: infectious diseases; *SIR* model; saturation infection rate; pulse vaccination; bifurcation

[责任编辑 陈留院 杨浦]