

基于信噪比度量的多奇异值修正估计

顾勇为^a, 李新娜^a, 郭淑妹^a, 李国重^a, 刘长健^b

(信息工程大学 a.基础部, b.地理空间信息学院, 郑州 450001)

摘要:针对线性模型的复共线性问题,提出了基于信噪比度量的多奇异值修正估计.复共线性对模型中各个参数的危害是有差异的,用信噪比估值可将其度量,以此将参数按危害程度的不同进行分类,同时得到对应设计矩阵的复共线性对参数估计危害的机理.以此为据,结合 OR 估计及 TSVD 估计的思想,提出了新算法 MSVC 估计.论证了 MSVC 估计是对 TSVD 估计和 OR 估计形式的统一.比较了 MSVC 估计、LS 估计和 OR 估计各自的特点. MSVC 估计的优势在于,与 LS 估计相比,其偏差略有增加,换取方差较大下降;与 OR 估计相比,其方差略有增加,换取偏差较大下降.通过数值试验,表明了 MSVC 估计的解算精度较高.

关键词:信噪比;复共线性;岭估计;奇异值;多参数

中图分类号:P207

文献标志码:A

文章编号:1000-2367(2026)01-0062-06

许多大地测量数据处理过程中,常常遇到病态方程求解问题,在误差存在的条件下其解极不稳定. Tikhonov 正则化方法、TSVD 正则化方法等是解决这一问题的有效途径^[1-4]. 这些方法不断改进,陆续成功应用到大地测量等领域,如利用多基线观测数据的 PolInSAR 植被高反演^[5]、卫星测高与船载重力测量数据融合^[6]、利用 GPS 垂直位移反演区域陆地水储量变化^[7]. Tikhonov、TSVD 等正则化方法也在实际工作的推动下,不断被优化和改进^[8-17]. 目前,这些方法在实际应用中尚未达到令人满意的效果,一个重要原因是这些方法的构造还不够精细,特别是没有充分利用具体问题中有关病态性的关键信息,采取对症下药的有力措施,导致这些方法在克服病态性对参数估计的危害时针对性不够强.

正则化方法既然是求解病态问题的一种手段,就应该针对病态问题的特点对症下药制定策略,而病态性的特点,特别是细节部分往往隐藏在反问题之中不易获得,然而对于病态性的表现和危害等情况能否进行深入细致地掌握将直接关系到解算方法的科学有效性. 文献[11]利用了病态性对参数估计影响的度量结果,将该信息运用到克服病态问题的正则化方法之中,按每个参数 LS 估计信噪比估值的大小不同,将待估参数区分为两类:涉扰参数、非涉扰参数,并对这两类参数的估计作不同强度的调整修正,提出了基于信噪比检验的部分奇异值双参数修正估计(PSVC). 深入研究发现,通过信噪比检验简单地将待估参数分为两类(涉扰参数和非涉扰参数)比较粗糙,本文根据信噪比检验的结果,将待估参数分为多类,再作有针对性的正则化处理,以进一步提高解算精度.

1 MSVC 估计的模型与算法

大地测量数据处理常用如下线性模型:

收稿日期:2024-07-08;**修回日期:**2024-08-19.

基金项目:国家自然科学基金(12201639);军队高层次人才自主科研项目(a6901).

作者简介:顾勇为(1965—),男,上海人,信息工程大学教授,博士,研究方向为应用统计和测量数据处理, E-mail:gywei65@163.com.

通信作者:李新娜, E-mail:lixinna22@126.com.

引用本文:顾勇为,李新娜,郭淑妹,等.基于信噪比度量的多奇异值修正估计[J].河南师范大学学报(自然科学版),2026,54(1):62-67.(Gu Yongwei, Li Xinna, Guo Shumei, et al. Multiple singular values correction estimation based on signal-to-noise ratio[J]. Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition), 2026, 54(1):62-67. DOI: 10.16366/j.cnki.1000-2367.2024.07.08.0001.)

$$\begin{cases} \mathbf{L} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{\Delta}, \\ E(\mathbf{\Delta}) = 0, \text{Cov}(\mathbf{\Delta}) = \sigma_0^2 \mathbf{I}_n, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\mathbf{A}$ 为列满秩的 $n \times t$ 阶矩阵. 令 $\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ 则 $\mathbf{L} = \tilde{\mathbf{L}} + \mathbf{\Delta}$. 设计矩阵 $\mathbf{A}$ 的奇异值分解为 $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T$, 其中, $\mathbf{U} = (u_1, u_2, \dots, u_t)$; $\mathbf{V} = (v_1, v_2, \dots, v_t)$; $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}_t$; $\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{I}_t$; $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_t)$; 其中 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_t > 0$ 为设计矩阵 $\mathbf{A}$ 的从大到小的奇异值. 模型(1)的 LS 估计可表为

$$\mathbf{X}_{\text{LS}} = \sum_{i=1}^t \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{L}}{\sigma_i} \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^t \left(\frac{\mathbf{u}_i^T \tilde{\mathbf{L}}}{\sigma_i} + \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{\Delta}}{\sigma_i} \right) \mathbf{v}_i. \quad (2)$$

LS 估计的优良性特别体现在观测值服从正态分布的条件下, 这是一个方差最小的无偏估计, 因此, 它是最为普遍采用的基本估计方法. 然而, 在实际应用中, 即便观测值服从正态分布, 当参数之间产生近似线性相关的关系, 法矩阵 $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$ 近似于奇异矩阵, 此时 LS 估计的效果也不好, 甚至非常之差^[1,3]. 为克服病态性问题对参数估计的危害, 构造

$$\Phi = \|\mathbf{A}\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{L}\|_p^2 + \alpha \Omega(\hat{\mathbf{X}}) = \min_{\hat{\mathbf{X}}}, \quad (3)$$

其中 $\|\cdot\|_p$ 表示加权欧氏范数, 所求之解 $\hat{\mathbf{X}}$ 使 Φ 达到最小. 式(3)中第 1 项是残差平方和, 第 2 项 $\Omega(\hat{\mathbf{X}})$ 称为稳定泛函, α 起着平衡两项的作用, 称为正则化参数. 通常取 $\Omega(\hat{\mathbf{X}}) = \|\hat{\mathbf{X}}\|_H^2 = \hat{\mathbf{X}}^T \mathbf{H} \hat{\mathbf{X}}$, 其中 $\mathbf{H}$ 为正则化矩阵, 式(3)化为

$$\Phi = \|\mathbf{A}\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{L}\|_p^2 + \alpha \|\hat{\mathbf{X}}\|_H^2 = \mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V} + \alpha \hat{\mathbf{X}}^T \mathbf{H} \hat{\mathbf{X}} = \min_{\hat{\mathbf{X}}}. \quad (4)$$

将式(4)对 $\hat{\mathbf{X}}$ 求导数, 并令其为 0, 得到正则化解

$$\mathbf{X}_{\alpha\mathbf{H}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} + \alpha \mathbf{H})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L}. \quad (5)$$

当复共线性存在时, 正则化估计在均方误差意义上是优于 LS 估计的. 为简要说明问题, 设权矩阵 $\mathbf{P}$ 及正则化矩阵 $\mathbf{H}$ 都是单位矩阵, 此时(5)可化为

$$\mathbf{X}_{\text{OR}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{L}, \quad (6)$$

此即常用的岭估计 (ordinary ridge estimation, OR), 其中 α 为岭参数.

分析岭估计与 LS 估计的差异可知, 在观测值服从正态分布的前提下, LS 估计为方差最小的无偏估计; 而岭估计是有偏估计, 是以少量增加估计的偏倚性为代价, 获取方差的大幅减小. 如果要减少对这种偏倚性的危害, 则必须对式(6)作出适当的改造. 既然正则化方法是针对病态性问题的解决办法, 如果要提高解决问题的效能, 就必须对病态性问题作出较为深入的分析诊断, 以便更好地采取措施对症下药. 对式(6)进一步作解析, 有

$$\mathbf{X}_{\text{OR}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{L} = \sum_{i=1}^t \frac{\sigma_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{L}}{\sigma_i^2 + \alpha} \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^t \left(\frac{\sigma_i \mathbf{u}_i^T \tilde{\mathbf{L}}}{\sigma_i^2 + \alpha} + \frac{\sigma_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{\Delta}}{\sigma_i^2 + \alpha} \right) \mathbf{v}_i. \quad (7)$$

病态问题对参数估计的危害, 施加在每个参数上的危害的大小是不同的, 甚至有很大的差别, 文献[8]对此作了深入研究, 提出了待估参数 LS 估计的信噪比估值的数量指标

$$f_i = \frac{(\hat{\mathbf{X}}_{\text{LS}}^i)^2 / \text{Var}(\hat{\mathbf{X}}_{\text{LS}}^i)}{\mathbf{V}^T \mathbf{V} / [(n-t)\sigma_0^2]}, \quad (8)$$

其中 $\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{X}_{\text{LS}} - \mathbf{L}$ 为残差, $\hat{\mathbf{X}}_{\text{LS}}^i$ 是参数 LS 估计第 i 个分量. 式(8)称为参数 $\mathbf{X}$ 的第 i 个分量的信噪比估计值.

通过计算每个参数的信噪比估值, 可以度量各个参数受病态性危害的差异. 将信噪比估值从大到小依次分为 k 个等级, 对应地将全部 t 个待估参数分为 k 个部分 $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1^T, \mathbf{X}_2^T, \dots, \mathbf{X}_k^T)^T$, 其中 $\mathbf{X}_s = (x_{s_1}, x_{s_2}, \dots, x_{s_{i_s}})^T$, $s = 1, 2, \dots, k$, $i_1 + i_2 + \dots + i_k = t$. 各个部分参数的信噪比估值为 $\mathbf{F}_1 = (f_{11}, f_{12}, \dots, f_{1i_1})^T$, $\mathbf{F}_2 = (f_{21}, f_{22}, \dots, f_{2i_2})^T, \dots, \mathbf{F}_k = (f_{k1}, f_{k2}, \dots, f_{ki_k})^T$. 第 1 部分 $\mathbf{X}_1$ 信噪比估值最大, 它们受复共线性的危害较小; 第 2 部分 $\mathbf{X}_2$ 次之, $\dots$, 第 k 部分 $\mathbf{X}_k$ 信噪比估值最小, 它们受复共线性的危害最大. 根据危害大小的不同制定正则化策略: 对 $\mathbf{X}_1$ 的 LS 估计作最小的修正, 对 $\mathbf{X}_2$ 作稍大的修正, $\dots$, 对 $\mathbf{X}_k$ 作最大的修正, 构造对角矩阵

$$\mathbf{D}_i = \text{diag}\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \alpha_1}, \dots, \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \alpha_1}, \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \alpha_2}, \dots, \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \alpha_2}, \dots, \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \alpha_k}, \dots, \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \alpha_k}\right),$$

由此,得到多参数岭估计

$$\mathbf{X}_{\text{MPR}} = \sum_{i=1}^t \mathbf{D}_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{L} \mathbf{v}_i, \quad (9)$$

其中 $\alpha_k > \alpha_{k-1} > \dots > \alpha_2 > \alpha_1 > 0$ 为 k 个修正岭参数,其中最大的岭参数 α_k 利用 L 曲线法^[1] 得到,其余岭参数 $\alpha_i = \alpha_k \cdot \frac{f_{k1}}{f_{i1}}, i = 1, 2, \dots, k-1$. 进而实现对部分参数 $\mathbf{X}_1$ 作较少修正,对 $\mathbf{X}_2$ 作稍大的修正,……,对 $\mathbf{X}_k$ 作最大的修正.

式(9)是对岭估计(7)的进一步改造,以减少偏差.为了得到更精确的估计,对 LS 估计求和项中较大的奇异值对应的项施以保护,以减少估计偏差.构造

$$\mathbf{X}_{\text{MSVC}} = \sum_{i=1}^s \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{L}}{\sigma_i} \mathbf{v}_i + \sum_{i=s+1}^t \mathbf{D}_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{L} \mathbf{v}_i \quad (10)$$

称为基于信噪比检验的多奇异值修正估计(multiple singular values correction estimation, MSVC).按文献[1]中的方法选取截断参数 s ,即选取满足

$$\left(\sum_{i=1}^s \frac{1}{\sigma_i}\right) / \left(\sum_{i=1}^t \frac{1}{\sigma_i}\right) \geq 95\%, \quad (11)$$

式(11)的最小整数.

MSVC 估计中,若 $\mathbf{D}_i (s+1 \leq i \leq t)$ 均为零矩阵, $\hat{\mathbf{X}}_{\text{MSVC}} = \sum_{i=1}^s \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{L}}{\sigma_i} \mathbf{v}_i$, 则 MSVC 估计退化为 $\mathbf{X}_{\text{TSVD}}$ 估计;

若 $s = t, \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = \alpha$, $\hat{\mathbf{X}}_{\text{MSVC}} = \sum_{i=1}^t \frac{\sigma_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{L}}{\sigma_i^2 + \alpha} \mathbf{v}_i$, 此时, MSVC 估计退化为 $\hat{\mathbf{X}}_{\text{OR}}$ 估计. 与 TSVD 法相比,

MSVC 方法没有舍弃小的奇异值,减少了估计误差,解的保真效果提高;与 OR 估计相比,OR 估计中的岭参数对全部奇异值都进行了修正,MSVC 方法仅仅修正了小奇异值,大奇异值保持不变,减少了估计的偏差.因此,MSVC 方法既吸收了 TSVD 法和 OR 估计的优点,又克服了它们的一些缺点,提高了解算质量.

综上,MSVC 估计是基于信噪比检验的结果,对岭估计进行精细化的改进,既有效降低估计的方差,又减少了偏差的引入.MSVC 算法的主要步骤为:

步骤 1 对未知参数作 LS 估计,将各个参数的信噪比估值分别计算出来,按其大小分为 k 类,对应地将未知参数也分为 k 类;

步骤 2 对 $\mathbf{A}$ 作奇异值分解,并按式(11) 确定截断参数 s ;

步骤 3 先利用 L 曲线法求岭参数,确定为较大的岭参数 α_k ,再确定较小的岭参数 $\alpha_i = \alpha_k \cdot \frac{f_{k1}}{f_{i1}}, i = 1, 2, \dots, k-1$,由此构造矩阵 $\mathbf{D}_i$;

步骤 4 根据式(10)计算得到估计结果.

2 MSVC 方法性质研究

文献[17]提出了 PSVC 方法,并深入讨论了其优良的性质.现按照文献[17]的研究思路,对新提出的 MSVC 估计方法作比较深入的研究,得到下面一些性质.

性质 1 $\hat{\mathbf{X}}_{\text{MSVC}}$ 是 $\mathbf{X}$ 的一种有偏估计, $\hat{\mathbf{X}}_{\text{MSVC}}$ 将常用估计 $\hat{\mathbf{X}}_{\text{TSVD}}$ 及 $\hat{\mathbf{X}}_{\text{OR}}$ 在形式上进行了统一.

证明 $\hat{\mathbf{X}}_{\text{MSVC}}$ 的期望为 $E(\hat{\mathbf{X}}_{\text{MSVC}}) = E\left(\sum_{i=1}^s \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{L}}{\sigma_i} \mathbf{v}_i + \sum_{i=s+1}^t \mathbf{D}_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{L} \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^s \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{A} \mathbf{X}}{\sigma_i} \mathbf{v}_i + \sum_{i=s+1}^t \mathbf{D}_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{A} \mathbf{X} \mathbf{v}_i = \left(\sum_{i=1}^s \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T + \sum_{i=s+1}^t \sigma_i \mathbf{D}_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T\right) \mathbf{X}$. 故 $\hat{\mathbf{X}}_{\text{MSVC}}$ 的偏差向量为 $E(\hat{\mathbf{X}}_{\text{MSVC}}) - \mathbf{X} = \left(\sum_{i=1}^s \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T + \sum_{i=s+1}^t \sigma_i \mathbf{D}_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T\right) \mathbf{X} - \mathbf{X} =$

$$(\sum_{i=1}^s \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T + \sum_{i=s+1}^t \sigma_i \mathbf{D}_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T - \sum_{i=1}^t \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T) \mathbf{X} = \sum_{i=s+1}^t (\sigma_i \mathbf{D}_i - \mathbf{I}) \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T \mathbf{X}.$$

性质 2 $\hat{\mathbf{X}}_{\text{MSVC}}$ 是 LS 估计的一个线性变换,并且是一种压缩型有偏估计.

$$\begin{aligned} \text{证明} \quad \hat{\mathbf{X}}_{\text{MSVC}} &= \sum_{i=1}^s \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{L}}{\sigma_i} \mathbf{v}_i + \sum_{i=s+1}^t \mathbf{D}_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{L} \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^s \frac{\mathbf{v}_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{L}}{\sigma_i} + \sum_{i=s+1}^t \mathbf{D}_i \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{L} = (\sum_{j=1}^s \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^T + \sum_{j=s+1}^t \sigma_j \mathbf{D}_j \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^T) \cdot \\ &\sum_{i=1}^t \frac{\mathbf{v}_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{L}}{\sigma_i} = (\sum_{j=1}^s \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^T + \sum_{j=s+1}^t \sigma_j \mathbf{D}_j \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^T) \hat{\mathbf{X}}_{\text{LS}}. \end{aligned}$$

令 $\tilde{\mathbf{V}} = (\frac{\mathbf{v}_1}{\sigma_1}, \dots, \frac{\mathbf{v}_s}{\sigma_s}, \mathbf{D}_{s+1} \mathbf{v}_{s+1}, \dots, \mathbf{D}_t \mathbf{v}_t)$, 则 $\hat{\mathbf{X}}_{\text{MSVC}} = \tilde{\mathbf{V}} \mathbf{A} \mathbf{V}^T \hat{\mathbf{X}}_{\text{LS}} \triangleq \mathbf{K} \hat{\mathbf{X}}_{\text{LS}}$, 所以 $\hat{\mathbf{X}}_{\text{MSVC}}$ 是 LS 估计的一个线性变换. 又因为 $\|\hat{\mathbf{X}}_{\text{MSVC}}\| = \|\tilde{\mathbf{V}} \mathbf{A} \mathbf{V}^T \hat{\mathbf{X}}_{\text{LS}}\| \leq \|\tilde{\mathbf{V}} \mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{V}^T\| \cdot \|\hat{\mathbf{X}}_{\text{LS}}\| \leq \|\mathbf{V}\| \cdot \|\mathbf{V}^T\| \cdot \|\hat{\mathbf{X}}_{\text{LS}}\| = \|\hat{\mathbf{X}}_{\text{LS}}\|$, 所以 $\hat{\mathbf{X}}_{\text{MSVC}}$ 是 $\mathbf{X}$ 的一种压缩型有偏估计.

性质 3 在椭球 $\mathbf{X}^T \mathbf{R} \mathbf{X} < \sigma_0^2$ 内, $\text{MSE}(\hat{\mathbf{X}}_{\text{MSVC}}) < \text{MSE}(\hat{\mathbf{X}}_{\text{LS}})$, 其中 $\mathbf{R} = (\mathbf{K} - \mathbf{I})^T [(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} - \mathbf{K}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{K}^T]^{-1} (\mathbf{K} - \mathbf{I})$. 即在椭球内, 估计 $\hat{\mathbf{X}}_{\text{MSVC}}$ 从均方误差意义下, 比 LS 估计更佳.

证明 只需证明 $\text{MSEM}(\hat{\mathbf{X}}_{\text{MSVC}}) < \text{MSEM}(\hat{\mathbf{X}}_{\text{LS}})$. 因为 $\text{MSEM}(\hat{\mathbf{X}}_{\text{LS}}) = \sigma_0^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$, 且

$$\text{MSEM}(\hat{\mathbf{X}}_{\text{MSVC}}) = \text{Cov}(\hat{\mathbf{X}}_{\text{MSVC}}) + (\mathbf{X} - \mathbf{E}(\hat{\mathbf{X}}_{\text{MSVC}}))(\mathbf{X} - \mathbf{E}(\hat{\mathbf{X}}_{\text{MSVC}}))^T, \quad (12)$$

由 $\hat{\mathbf{X}}_{\text{MSVC}} = \mathbf{K} \hat{\mathbf{X}}_{\text{LS}}$, 代入式(12), 得 $\text{MSEM}(\hat{\mathbf{X}}_{\text{MSVC}}) = \sigma_0^2 \mathbf{K}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{K}^T + (\mathbf{K} - \mathbf{I}) \mathbf{X} \mathbf{X}^T (\mathbf{K} - \mathbf{I})^T$.

要使 $\text{MSE}(\hat{\mathbf{X}}_{\text{MSVC}}) < \text{MSE}(\hat{\mathbf{X}}_{\text{LS}})$ 成立, 只需证明 $(\mathbf{K} - \mathbf{I}) \mathbf{X} \mathbf{X}^T (\mathbf{K} - \mathbf{I})^T < \sigma_0^2 [(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} - \mathbf{K}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{K}^T]$.

根据定理^[10]中“若 $d > 0$, N 为正定的, $\mathbf{X} \neq 0$, 则 $dN - \mathbf{X} \mathbf{X}^T > 0$ 当且仅当 $\mathbf{X}^T N^{-1} \mathbf{X} < d$ ”可知, 只要满足 $\mathbf{X}^T (\mathbf{K} - \mathbf{I})^T [(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} - \mathbf{K}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{K}^T]^{-1} (\mathbf{K} - \mathbf{I}) \mathbf{X} \triangleq \mathbf{X}^T \mathbf{R} \mathbf{X} < \sigma_0^2$.

性质 4 与 $\hat{\mathbf{X}}_{\text{LS}}$ 相比, $\hat{\mathbf{X}}_{\text{MSVC}}$ 方差较小而偏差较大; 与 $\hat{\mathbf{X}}_{\text{OR}}(\alpha_2)$ 相比, $\hat{\mathbf{X}}_{\text{MSVC}}$ 方差较大而偏差较小, 其中 $\hat{\mathbf{X}}_{\text{OR}}(\alpha_2)$ 表示岭参数为 α_2 的 OR 估计.

证明 因为 $\text{Cov}(\hat{\mathbf{X}}_{\text{LS}}) = \sigma_0^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} = \sigma_0^2 \sum_{i=1}^t \frac{\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T}{\sigma_i^2}$, 且

$$\text{Cov}(\hat{\mathbf{X}}_{\text{MSVC}}) = \text{Cov}(\tilde{\mathbf{V}} \mathbf{A} \mathbf{V}^T \hat{\mathbf{X}}_{\text{LS}}) = \tilde{\mathbf{V}} \mathbf{A} \mathbf{V}^T \text{Cov}(\hat{\mathbf{X}}_{\text{LS}}) (\tilde{\mathbf{V}} \mathbf{A} \mathbf{V}^T)^T = \sigma_0^2 \tilde{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{V}}^T = \sigma_0^2 (\frac{\mathbf{v}_1}{\sigma_1}, \dots, \frac{\mathbf{v}_s}{\sigma_s},$$

$$\mathbf{D}_{s+1} \mathbf{v}_{s+1}, \dots, \mathbf{D}_t \mathbf{v}_t) (\frac{\mathbf{v}_1}{\sigma_1}, \dots, \frac{\mathbf{v}_s}{\sigma_s}, \mathbf{D}_{s+1} \mathbf{v}_{s+1}, \dots, \mathbf{D}_t \mathbf{v}_t)^T = \sigma_0^2 (\sum_{i=1}^s \frac{\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T}{\sigma_0^2} + \sum_{i=s+1}^t \mathbf{D}_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T \mathbf{D}_i^T),$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\hat{\mathbf{X}}_{\text{OR}}(\alpha_2)) &= \text{Cov}((\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha_2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{L}) = \sigma_0^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha_2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha_2 \mathbf{I})^{-1} = \\ &\mathbf{V} (\mathbf{A}^2 + \alpha_2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^2 (\mathbf{A}^2 + \alpha_2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{V}^T = \sigma_0^2 \sum_{i=1}^t (\frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \alpha_2})^2 \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T. \end{aligned}$$

对比 $\text{Cov}(\hat{\mathbf{X}}_{\text{LS}})$, $\text{Cov}(\hat{\mathbf{X}}_{\text{MSVC}})$, $\text{Cov}(\hat{\mathbf{X}}_{\text{OR}}(\alpha_2))$, 由于 $0 < \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \alpha_k} \mathbf{I} < \mathbf{P}_i < \frac{1}{\sigma_i} \mathbf{I}$, 可得出 $\text{Cov}(\hat{\mathbf{X}}_{\text{OR}}(\alpha_2)) <$

$$\text{Cov}(\hat{\mathbf{X}}_{\text{MSVC}}) < \text{Cov}(\hat{\mathbf{X}}_{\text{LS}}).$$

进一步, 由 $\mathbf{E}(\hat{\mathbf{X}}_{\text{OR}}(\alpha_2)) = \mathbf{V} (\mathbf{A}^2 + \alpha_2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^2 \mathbf{V}^T \mathbf{X} = \sum_{i=1}^t (\frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \alpha_2} \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i) \mathbf{X}$ 可得偏差为 $\mathbf{X} - \mathbf{E}(\hat{\mathbf{X}}_{\text{OR}}(\alpha_2)) =$

$\sum_{i=1}^t \frac{\alpha_2}{\sigma_i^2 + \alpha_2} \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i \mathbf{X}$. 对比式(12)与 $\mathbf{X} - \mathbf{E}(\hat{\mathbf{X}}_{\text{OR}}(\alpha_2))$, 由于

$$\mathbf{I} - \sigma_i \mathbf{D}_i = \text{diag}(\frac{\alpha_1}{\sigma_i^2 + \alpha_1}, \dots, \frac{\alpha_1}{\sigma_i^2 + \alpha_1}, \dots, \frac{\alpha_k}{\sigma_i^2 + \alpha_k}) < \frac{\alpha_k}{\sigma_i^2 + \alpha_k} \mathbf{I},$$

所以 $\|\mathbf{X} - \mathbf{E}(\hat{\mathbf{X}}_{\text{LS}})\| < \|\mathbf{X} - \mathbf{E}(\hat{\mathbf{X}}_{\text{MSVC}})\| < \|\mathbf{X} - \mathbf{E}(\hat{\mathbf{X}}_{\text{OR}}(\alpha_2))\|$.

综上可得, $\hat{\mathbf{X}}_{\text{MSVC}}$ 与 $\hat{\mathbf{X}}_{\text{LS}}$ 比较, 偏差略有增加换取方差较大下降, $\hat{\mathbf{X}}_{\text{MSVC}}$ 与 $\hat{\mathbf{X}}_{\text{OR}}(\alpha_2)$ 比较, 方差略有增加换取偏差较大下降.

3 数值模拟

下面给出一个空间坐标转换的算例^[18]. 在纬度 $30^\circ \sim 30^\circ 10'$ 经度 $120^\circ \sim 120^\circ 10'$ 范围内, 以单位长 1 作等间隔模拟 121 个点, 并假定每个点的大地高均为 0 m. 若原坐标系为 WGS84 坐标系, 新坐标系为 BJ54 坐标系, 给定 Bursa 模型的 7 个参数: $X_0=100$ m, $Y_0=200$ m, $Z_0=300$ m, $\epsilon_x=2''$, $\epsilon_y=3''$, $\epsilon_z=4''$, $\delta\mu=2 \times 10^{-6}$ m. 分别计算 121 个点在两个坐标系下的坐标, 令其为坐标真值. 选择其内部的 9 个点为控制点(49、50、51、60、61、62、71、72、73 点), 控制点中加入高斯白噪声服从正态分布 $N(0, 0.05)$. 分别采用 LS、TSVD、OR 与 MSVC 的算法计算出转换参数. 分别利用这 4 种算法得到的转换参数, 计算出转换坐标, 并求其与坐标真值的差, 求出中误差, 作外推精度. 按下述公式计算 $m = \sqrt{(\sum_{i=1}^n (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2))/n}$, 式中 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 为转换坐标与真值坐标之差, $n=112$ 为外围点数. 共作 500 次模拟, 产生 500 个中误差. 图 1 表示由 LS、TSVD、OR 与 MSVC 算法得到的外推精度.

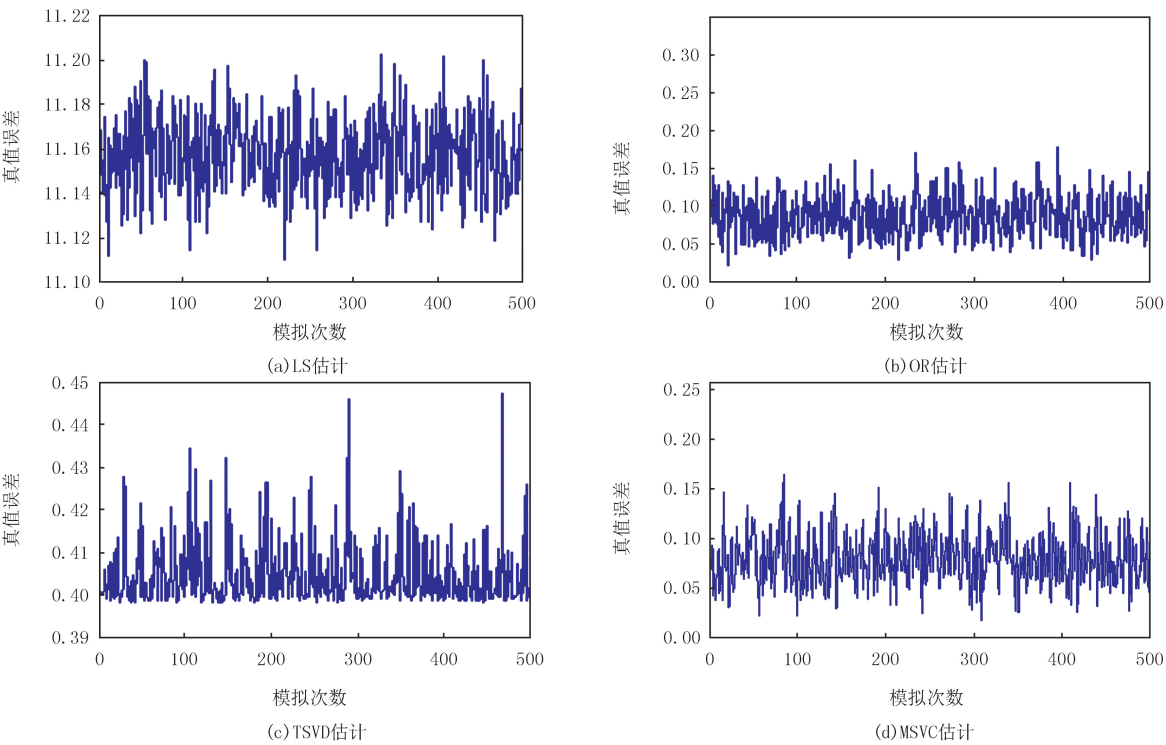


图1 最小二乘、岭估计、TSVD估计与MSVC解转换坐标中误差

Fig.1 The Mean square errors of transformation coordinates by LS estimation, OR, TSVD and MSVC

分析以上结果, LS 方法的解算质量很差, TSVD、OR 和 MSVC 方法提高了求解质量, 其中特别是 MSVC 方法的解算效果最佳.

4 结论

MSVC 估计综合运用了病态性问题的 3 种处理技术——TSVD 方法、OR 方法和基于复共线性诊断的正则化方法, 充分发挥各种处理病态性问题的方法的优势, 弥补了各项方法单独使用的不足之处. 通过数值试验表明, 与 OR 估计和 TSVD 估计相比, MSVC 估计的解算精度更高.

进一步, 本文论证了 MSVC 估计是对 TSVD 估计和 OR 估计形式的统一, 给出了 MSVC 估计在均方误

差意义下优于 LS 估计的条件.从分析偏差和方差的角度,论证和比较了 MSVC 估计、LS 估计和 OR 估计各自的特点.MSVC 估计的优势在于,与 LS 估计相比,其偏差略有增加换取方差较大下降;与 OR 估计相比,其方差略有增加换取偏差较大下降.

表 1 外推精度统计

Tab. 1 Extrapolation accuracy statistics

m

方法	误差均值	最大误差	最小误差	方法	误差均值	最大误差	最小误差
LS	11.157 1	11.204 7	11.103 4	OR	0.087 3	0.164 8	0.018 7
TSVD	0.404 2	0.447 0	0.398 0	MSVC	0.080 0	0.147 3	0.013 2

参 考 文 献

[1] 王振杰.测量中不适定问题的正则化解法[M].北京:科学出版社,2006:66-85.

[2] SHEN Y Z,XU P L,LI B F.Bias-corrected regularized solution to inverse ill-posed models[J].Journal of Geodesy,2012,86(8):597-608.

[3] 王松桂.线性模型的理论及其应用[M].合肥:安徽教育出版社,1987:196-210.

[4] 顾勇为,归庆明,韩松辉.基于信噪比的正则化方法及其在 GPS 快速定位中的应用[J].中国科学:物理学 力学 天文学,2010,40(5):663-668.

GU Y W,GUI Q M,HAN S H.Regularization based on signal-to-noise index and its application in GPS rapid positioning[J].Scientia Sinica(Physica,Mechanica & Astronomica),2010,40(5):663-668.

[5] 林东方,朱建军,李志伟,等.顾及地表散射贡献与多基线参数线性相关性的 PolInSAR 植被高反演方法[J].测绘学报,2023,52(1):51-60.

LIN D F,ZHU J J,LI Z W,et al.A multi-baseline PolInSAR forest height inversion method taking into account the ground scattering effects and parametric linear[J].Acta Geodaetica et Cartographica Sinica,2023,52(1):51-60.

[6] 柯宝贵,张利明,章传银,等.卫星测高与船载重力测量数据融合的点质量拟合法[J].测绘学报,2018,47(7):924-929.

KE B G,ZHANG L M,ZHANG C Y,et al.Fusion the altimetric and shipborne gravity data based on point mass fit method[J].Acta Geodaetica et Cartographica Sinica,2018,47(7):924-929.

[7] 钟波,李贤炮,李建成,等.利用 GPS 垂直位移反演区域陆地水储量变化的 TSVD-Tikhonov 正则化方法[J].地球物理学报,2023,66(3):997-1014.

ZHONG B,LI X P,LI J C,et al.Inversion of regional terrestrial water storage changes using GPS vertical displacements based on TSVD-Tikhonov regularization method[J].Chinese Journal of Geophysics,2023,66(3):997-1014.

[8] 顾勇为,张磊,归庆明,等.复共线性对参数估计危害的度量及检验[J].测绘科学,2008,33(2):110-112.

GU Y W,ZHANG L,GUI Q M,et al.A method to measure and test the damage of multicollinearity to parameter estimation[J].Science of Surveying and Mapping,2008,33(2):110-112.

[9] 韩松辉,归庆明,李建成,等.分布式自主定轨的岭型 EKF 算法[J].武汉大学学报(信息科学版),2013,38(4):399-402.

HAN S H,GUI Q M,LI J W,et al.Ridge-type EKF of distributed autonomous orbit determination[J].Geomatics and Information Science of Wuhan University,2013,38(4):399-402.

[10] 姜兆英,刘国林,于胜文.病态方程基于 Liu 估计的一种迭代估计新方法[J].武汉大学学报(信息科学版),2017,42(8):1172-1178.

JIANG Z Y,LIU G L,YU S W.A new iterative estimator method based on Liu estimator for ill-posed equations[J].Geomatics and Information Science of Wuhan University,2017,42(8):1172-1178.

[11] 李豪,顾勇为,郭淑妹.基于信噪比检验的部分奇异值双参数修正估计[J].测绘科学技术学报,2017,34(4):342-346.

LI H,GU Y W,GUO S M.Partial singular value correction estimation with double parameters based on signal-to-noise ratio test[J].Journal of Geomatics Science and Technology,2017,34(4):342-346.

[12] 郭杰,归庆明,郭淑妹,等.利用复共线性诊断确定偏差矫正项的截断型岭估计[J].武汉大学学报(信息科学版),2015,40(6):785-789.

GUO J,GUI Q M,GUO S M,et al.Truncation ridge estimation based on the biased-corrected theory by multicollinearity diagnosis[J].Geomatics and Information Science of Wuhan University,2015,40(6):785-789.

[13] XU P L.Truncated SVD methods for discrete linear ill-posed problems[J].Geophysical Journal International,1998,135(2):505-514.

[14] 李贤炮,钟波,刘滔.GNSS 垂直位移反演区域地表质量变化的模拟分析[J].武汉大学学报(信息科学版),2022,47(1):45-54.

LI X P,ZHONG B,LIU T.Simulation analysis of inverting regional surface mass variations using GNSS vertical displacement[J].Geomatics and Information Science of Wuhan University,2022,47(1):45-54.

[17] YAO K.Uncertain differential equation[M]//Uncertain Differential Equations.Berlin:Springer,2016:49-94.

[18] GE X T,ZHU Y G.A necessary condition of optimality for uncertain optimal control problem[J].Fuzzy Optimization and Decision Making,2013,12(1):41-51.

[19] GE X T,ZHU Y G.Existence and uniqueness theorem for uncertain delay differential equations[J].Journal of Computational Information Systems,2012,8(20):8341-8347.

[20] GAO C W,ZHANG Z Q,LIU B L.Uncertain population model with jumps[J].Mathematics,2022,10(13):2265.

[21] YAO K.Multi-dimensional uncertain calculus with Liu process[J].Journal of Uncertain Systems,2014,8(4):244-254.

[22] LIU B.Some research problems in uncertainty theory[J].Journal of Uncertain Systems,2009,3(1):3-10.

Research on portfolio model based on backward uncertain differential equations

Gao Caiwen, Zhang Feiyu

(School of Mathematics and Statistics, Shanxi Datong University, Datong 037009, China)

Abstract: Backward uncertain differential equation is a special kind of differential equations driven by the Liu process. It studies the issue of how to make decisions and take behavioral paths at the current moment in order to achieve the expected goals in the future under uncertain environment. Firstly, the relevant theory of backward uncertain differential equations is introduced and the solution of linear backward uncertain differential equation is given. Secondly, considering that the theory of backward uncertain differential equation is suitable for investment in financial market, an uncertain portfolio model characterized by linear backward uncertain differential equation is established.

Keywords: linear backward uncertain differential equations; Liu process; portfolio model

[责任编辑 陈留院 杨浦]

(上接第 67 页)

[15] 陶叶青,杨娟,严琰.条件数控制的变量中含有误差模型的正则化算法[J].测绘科学,2022,47(3):186-191.

TAO Y Q,YANG J,YAN Y.Algorithm for regularization of EIV model based on control of condition number[J].Science of Surveying and Mapping,2022,47(3):186-191.

[16] ZHU J J,XIE Q H,ZUO T Y,et al.Complex least squares adjustment to improve tree height inversion problem in PolInSAR[J].Journal of Geodesy and Geoinformation Science,2019,2(1):1-8.

[17] 李豪.病态问题的奇异值双参数修正解法及其应用[D].郑州:战略支援部队信息工程大学,2018.

[18] 陈正宇,刘春.基于多参数正则化的空间坐标转换与精度分析[J].大地测量与地球动力学,2008,28(1):92-95.

CHEN Z Y,LIU C.Spatial coordinate transformation based on multiple parameter regularization and its accuracy analysis[J].Journal of Geodesy and Geodynamics,2008,28(1):92-95.

Multiple singular values correction estimation based on signal-to-noise ratio

Gu Yongwei^a, Li Xinna^a, Guo Shumei^a, Li Guozhong^a, Liu Changjian^b

(a. Foundation Department; b. Geospatial Information Department, Information Engineering University, Zhengzhou 450001, China)

Abstract: In order to solve the multicollinearity problem in linear models, a multi singular values correction estimation based on the signal-to-noise ratio estimation is proposed. The hazards of multicollinearity to parameters in the model are different, which can be measured by the signal-to-noise ratio estimation, so as to classify the parameters according to the different hazard degrees, and at the same time, the hazards mechanism of the multicollinearity to design matrix is obtained. Based on this, combined with the ideas of OR estimation and TSVD estimation, a new MSVC estimation is proposed. It is demonstrated that the MSVC estimation is a unification of the TSVD estimation and the OR estimation forms. The characteristics of MSVC estimation, LS estimation and OR estimation are compared. The advantages of MSVC estimation are as follows:Compared with LS estimation, it achieves a significant reduction in variance at the cost of a slight increase in bias; compared with the OR estimate, the variance increases slightly, in exchange for a large decrease in bias. Numerical experiments show that the MSVC estimation has high calculation accuracy.

Keywords: SNR; multicollinearity; ridge estimation; singular value; multiple parameters

[责任编辑 陈留院 杨浦]