

一种非线性系统积分 Terminal 滑模的控制系统设计

郭建国, 贾齐晨, 周 军

(西北工业大学 精确制导与控制研究所, 西安 710072)

摘 要:针对一种非线性动态系统,提出了一种新的非奇异的快速 Terminal 滑模控制系统设计方法.首先,在分析 Terminal 滑模设计方法的基础上,为了进一步加速状态在滑模运动的速度,提出了一种快速 Terminal 滑模,避免了传统 Terminal 滑模奇异问题,并给出了状态收敛到平衡状态的时间范围.其次,针对含有不确定性的非线性系统,结合反演法设计了有限时间稳定的快速 Terminal 滑模控制系统.最后,利用数字仿真验证了提出的积分 Terminal 滑模控制系统设计的有效性.

关键词:Terminal 滑模;有限时间稳定;李亚普诺夫稳定性;反演法

中图分类号:TP273

文献标志码:A

众所周知,变结构控制系统^[1-2]对于系统内部参数和外部干扰具有很强的鲁棒性.在变结构控制系统设计中,主要是设计滑模控制,来驱动系统状态在有限时间内到达预定的滑动模态上,并沿着滑动模态运动到平衡点.对于传统的变结构控制系统,常常设计一个线性滑模函数,系统状态在滑动模态上具有期望的闭环系统性能,状态在滑动模态上是渐近稳定到平衡状态.尽管可以改变参数调节系统状态在滑动模态上的收敛速度,但不能实现有限时间稳定.因此,如何设计有限时间稳定的滑模函数就成为国内外学者研究的焦点.

显然,有限时间稳定的动态系统可以获得更好性能特性. Venkataraman 和 Gulati^[3]首先提出了一个非线性 Terminal 滑模代替线性滑模函数,来实现状态在滑动模态上的有限时间稳定.这样,Terminal 滑模的概念就和有限时间控制联系起来了,目前有两种方法设计 Terminal 滑模,一种方法是采用系统状态或误差状态的分数阶幂次函数形式表征非线性 Terminal 滑模函数^[4-11],另外一种方法则是利用系统状态或误差状态的整数阶幂次函数形式表征非线性 Terminal 滑模函数^[12-13],这种滑动模态实际上是一种全程滑动模态,因为变结构控制系统中不含到达阶段.

相比线性滑模函数,第一种含有系统状态或误差状态的分数阶幂次函数的 Terminal 滑模虽然具有有限时间稳定的特性,但是它还存在控制奇异问题,目前已经有两大类方法解决了这个奇异问题.第一类方法被称为间接法^[14-17],就是在原有的 Terminal 滑模的基础上,将 Terminal 滑模分为两部分表示,增加部分为线性形式或非线性形式,只要保证整个滑模的连续可导性的要求,这类滑模函数常常称为快速 Terminal 滑模.第二类方法被称为直接法^[18-20],采用其他非线性函数来修正原有的 Terminal 滑模,解决了原有的控制奇异问题.

本文针对 Terminal 滑模,重点从系统状态在滑动模态上的有限收敛时间出发,提出了一种收敛时间更快的 Terminal 滑模,设计的滑动模态控制系统不仅避免了传统 Terminal 滑模奇异问题,而且能有效抑制系统不确定性的影响,具有良好的鲁棒性.通过和其他 Terminal 滑动模态控制系统的比较,本文所提出的控制系统具有更好的性能特性.

1 Terminal 滑模上的收敛时间问题

首先考虑一个含不确定性的非线性动态系统

收稿日期:2015-08-04;修回日期:2015-09-22.

基金项目:国家自然科学基金(61473226);航天科技创新基金项目(N14XW0001).

第1作者简介(通信作者):郭建国(1975-),男,河南南阳人,西北工业大学教授,博士生导师,研究方向为先进控制理论及应用,飞行器制导、控制与仿真,E-mail:guojianguo@nwpu.edu.cn.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = f(x) + b(x)u + d(x), \end{cases} \quad (1)$$

式中, $x = [x_1, x_2]^T \in \mathbf{R}^2$ 是系统状态向量, u 是系统输入, $f(x)$ 和 $b(x) \neq 0$ 均是光滑的非线性函数, $d(x)$ 表示系统的内部参数摄动和外部干扰的不确定性, 并满足 $|d(x)| \leq \delta$, 其中 δ 是一个正实数.

针对系统(1), 下面来分析状态在 Terminal 滑模上的收敛时间问题.

首先, 考虑最早的 Terminal 滑模形式^[3] 如下:

$$s = x_2 + \beta x_1^{q/p}, \quad (2)$$

式中, β 是一个正实数, 正的整数奇数 p 和 q 满足 $1 < p/q < 2$.

先不考虑奇异问题, 当系统状态到达滑模函数(2) 上时, 则状态 $x_1(0) \neq 0$ 收敛到 $x_1(t_{s1}) = 0$ 的时间可以计算得到:

$$t_{s1} = \frac{p}{\beta(p-q)} |x_1(0)|^{1-q/p}. \quad (3)$$

但是如果考虑到奇异问题, 例如采用间接法, 系统状态在滑动模态上的收敛时间(3) 就会增长.

其次, 考虑第 2 种 Terminal 滑模的形式^[6], 这种形式如下:

$$s = x_2 + \beta |x_1|^\lambda \text{sgn}(x_1), \quad (4)$$

式中, $0 < \lambda < 1$. 这种形式等价于滑模函数(2), 由此, 当系统状态到达滑模函数(4) 上时, 可以得到状态 $x_1(0) \neq 0$ 收敛到原点的时间为:

$$t_{s2} = \frac{1}{\beta(1-\lambda)} |x_1(0)|^{1-\lambda}. \quad (5)$$

显然, 对于 Terminal 滑模(2) 和(4) 式来说, 如果满足 $\lambda = q/p$, 则相同系统状态初值在滑模函数(2) 和(4) 上的收敛时间(3) 和(5) 式就相等, 即 $t_{s2} = t_{s1}$.

接下来考虑第 3 种形式的 Terminal 滑模^[7], 其形式如下:

$$s = x_2 + \alpha x_1 + \beta x_1^{q/p}, \quad (6)$$

式中, α 是一个正实数. 同样先不考虑奇异问题, 当系统状态到达滑模函数(6) 上时, 则状态 $x_1(0) \neq 0$ 收敛到原点的时间为

$$t_{s3} = \frac{p}{\alpha(p-q)} \ln \frac{\alpha |x_1(0)|^{1-q/p} + \beta}{\beta}. \quad (7)$$

同样若考虑了奇异问题, 采用间接法所得到系统状态在滑动模态上的收敛时间(7) 仍会增长. 此外, 同 Terminal 滑模(6) 等价的另外一种形式^[6] 为

$$s = x_2 + \alpha x_1 + \beta |x_1|^\lambda \text{sgn}(x_1). \quad (8)$$

对于 Terminal 滑模(8), 状态收敛时间为

$$t_{s4} = \frac{1}{\alpha(1-\lambda)} \ln \frac{\alpha |x_1(0)|^{1-\lambda} + \beta}{\beta}. \quad (9)$$

同样, 对于 Terminal 滑模(6) 和(8) 来说, 如果满足 $\lambda = q/p$, 则相同系统状态初值在滑模函数(6) 和(8) 上的收敛时间(7) 和(9) 就相等, 即 $t_{s3} = t_{s4}$. 此外, 对于 Terminal 滑模(2) 和(6), 或对于 Terminal 滑模(4) 和(8), 由于系统状态在滑动模态上的速度增加, 相应的状态收敛的时间就会减少, 因此可得 $t_{s3} < t_{s1}$ 或 $t_{s4} < t_{s2}$.

第 4 种 Terminal 滑模^[8] 的形式如下:

$$s = x_1 + \beta x_2^{p/q}, \quad (10)$$

式中, p 和 q 均是正的整数奇数, 且满足 $q < p < 2q$. 仍能得到 Terminal 滑模(10) 等价的另外一种形式^[6] 为

$$s = x_1 + \beta |x_2|^{\lambda'} \text{sgn}(x_2), \quad (11)$$

或者为

$$s = x_2 + \beta^{-1/\lambda'} |x_1|^{1/\lambda'} \text{sgn}(x_1), \quad (12)$$

式中 $\lambda' = p/q$, 即 $\frac{1}{2} < \frac{1}{\lambda'} < 1$.

同样,对于 Terminal 滑模(11),状态收敛时间为

$$t_{s5} = \frac{1}{\beta^{-1/\lambda'}(1-1/\lambda')} |x_1(0)|^{1-1/\lambda'}. \quad (13)$$

比较 Terminal 滑模(4)和(11)(或(12))的不同,当 $\lambda = 1/\lambda'$ 且 $\beta > 1$ 时,很容易就会得到相同系统状态初值在滑模函数(4)和(11)上的收敛时间(5)和(13)满足 $t_{s2} \leq t_{s5}$.

第5种 Terminal 滑模^[9]的形式为

$$s = x_2 + \beta x_1^l + \gamma x_1^{\bar{l}}, \quad (14)$$

式中, $\gamma > 0$, $0 < l < 1$, $\bar{l} > 1$, 即 $l = \frac{q}{p}$, $\bar{l} = \frac{N(p-q)+q}{p}$, 其中 $N \geq 2$ 的整数. 为了避免 Terminal(14)滑模的奇异问题,采用另外一种形式为

$$s = x_1 + \int_0^t [\beta x_1^l + \gamma x_1^{\bar{l}}] dt. \quad (15)$$

显然, Terminal 滑模(14)和(15)均是含有两个幂次函数的非线性函数,但是对 Terminal 滑模(15)求导,就不会产生奇异问题.

同样,对于 Terminal 滑模(8)和(15),当 $\gamma = \alpha$ 且 $l = \lambda$,如果系统状态离原点较远,即满足 $|x_1(t_0)| > 1$,则状态在滑模函数(15)上从 $x_1(t_0)$ 达到 $|x_1(t)| = 1$ 的时间就比在滑模函数(8)上短,这是因为状态在滑动模态上的运动速度不同,满足 $\beta |x_1(t)|^l + \gamma |x_1(t)|^{\bar{l}} > \beta |x_1(t)|^\lambda + \alpha |x_1(t)|$. 但对于状态 $|x_1(t_0)| \leq 1$ 就不可比较了.

为了能够进一步加速系统状态在滑动模态上的收敛时间,无论是系统状态 $|x_1(t_0)| > 1$ 或 $|x_1(t_0)| \leq 1$,本文提出了一种更快的 Terminal 滑模函数.

2 Terminal 滑动模态控制设计

本文针对非线性动态系统(1),设计一个具有更快收敛时间的 Terminal 滑动模态控制器,使得状态 x_1 能够在有限时间内跟踪上期望信号 x_m .

令误差状态 $y = x_1 - x_m$,则本文提出的更快速收敛的 Terminal 滑模函数为

$$\sigma = y + \int_0^t [\alpha y + \bar{\beta} \text{sgn}(y) + \gamma y^{\bar{l}}] dt, \quad (16)$$

式中, $\bar{\beta} > 0$. 显然, σ 是连续可导的函数.

2.1 在 Terminal 滑动模态上的收敛时间

首先研究一下误差状态沿着 Terminal 滑模 $\sigma = 0$ 上的收敛时间问题. 关于误差状态 y 在滑模 σ 的收敛时间,有以下定理1.

定理1 针对给定的 Terminal 滑模函数(16),若误差状态进入滑模 $\sigma = 0$ 运动,其初值 $y(t_0) \neq 0$,当 $\bar{l} = 2$ 时,误差状态收敛到零的时间为

$$t_s < \begin{cases} t_1 + t_2, & |y(t_0)| > 1, \\ t_2, & |y(t_0)| \leq 1 \end{cases},$$

式中, t_1 和 t_2 满足以下条件 $t_1 = \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{\alpha + \gamma}{\alpha / |y(t_0)| + \gamma}\right)$, $|y(t_0)| > 1$, $t_2 =$

$\sum \left\{ \frac{1}{\sqrt{\beta\gamma}} \left[\arctan\left(\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} |y(t_0)|\right) \right] - k\pi \right\}$, $|y(t_0)| \leq 1$. 其中 $\sum \{A\}$ 表示集合 A 的最小正值, k 为正整数.

证明 当误差状态在滑动模态 $\sigma = 0$ 运动时,有 $\dot{\sigma} = 0$,即

$$\dot{y} + \alpha y + \bar{\beta} \text{sgn}(y) + \gamma y^{\bar{l}} = 0.$$

首先,若 $|y(t_0)| > 1$,不失一般性,令 $y(t_0) > 1$,则 $\dot{y} = -\alpha y - \bar{\beta} \text{sgn}(y) - \gamma y^{\bar{l}} < -\alpha y - \gamma y^{\bar{l}}$. 因此,在不考虑 $\bar{\beta} \text{sgn}(y)$ 的条件下,可得

$$\dot{y} + \alpha y + \gamma y^{\bar{l}} = 0. \quad (17)$$

显然,微分方程(17)为 Bernoulli 微分方程,当 $\bar{l} = 2$ 时,可求得方程(17)的通解为 $y(t) \left[e^{\alpha \left(\frac{1}{y(t_0)} + \frac{\gamma}{\alpha} \right) - \frac{\gamma}{\alpha}} \right] = 1$. 令 $y(t_1) = 1$, 可解得 $t_1 = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{\alpha + \gamma}{\alpha / |y(t_0)| + \gamma} \right)$.

从 $\dot{y} = -\alpha y - \beta \operatorname{sgn}(y) - \gamma y^l < -\alpha y - \gamma y^l$ 可知,对于 $\dot{y} + \alpha y + \bar{\beta} \operatorname{sgn}(y) + \gamma y^l = 0$, 当 $y(t_0) > 1$ 时, $y(t_0)$ 在小于 t_1 的时间 t_1 内达到 $y(t_1) = 1$.

同理当 $y(t_0) < -1$ 时,也能得到同样结论.

其次,当 $|y(t_0)| \leq 1$ 时,仍不失一般性,令 $0 < y(t_0) \leq 1$, 则 $\dot{y} = -\alpha y - \bar{\beta} \operatorname{sgn}(y) - \gamma y^l < -\gamma y^l - \bar{\beta}$, 在不考虑 αy 的条件下,可得

$$\dot{y} + \gamma y^l + \bar{\beta} = 0. \quad (18)$$

显然,微分方程(18)为广义的 Riccati 微分方程,当 $\bar{l} = 2$ 时,可求得方程(18)的通解为 $y(t) = \sqrt{\frac{\bar{\beta}}{\gamma}} \tan(c - t \sqrt{\beta \gamma})$.

当 $t = 0$ 时,可得 $c = \arctan \left(\sqrt{\frac{\gamma}{\bar{\beta}}} y(0) \right)$; 由此,当 $y(t_2) = 0$ 时,则可得

$$t_2 = \sum \left\{ \frac{1}{\sqrt{\beta \gamma}} \left[\arctan \left(\sqrt{\frac{\gamma}{\bar{\beta}}} |y(t_0)| \right) \right] - k\pi \right\}.$$

从 $\dot{y} = -\alpha y - \bar{\beta} \operatorname{sgn}(y) - \gamma y^l < -\gamma y^l - \bar{\beta}$ 可知,对于 $\dot{y} + \alpha y + \bar{\beta} \operatorname{sgn}(y) + \gamma y^l = 0$, 当 $0 < y(t_0) \leq 1$ 时, $y(t_0)$ 在小于 t_2 的时间 t_2 内达到 $y(t_{21}) = 0$.

同理当 $-1 \leq y(t_0) < 0$ 时,也能得到同样结论.

综合以上分析,可知,当 $|y(t_0)| > 1$ 时,误差状态沿着滑模 $\sigma = 0$ 在 $t_1 + t_2$ 内就会收敛到零;当 $|y(t_0)| \leq 1$ 时,误差状态沿着滑模 $\sigma = 0$ 在 t_1 内就会收敛到零.

注 1 当 $\bar{l} = 3$ 时,微分方程(18)是 Abei 微分方程,求解见文献[21],当 $\bar{l} \geq 4$ 时,难以用初等积分求解. 针对定理 1 中给出的误差在滑模 $\sigma = 0$ 收敛的时间范围,相比滑模函数(15),有如下定理 2.

定理 2 针对给定的 Terminal 滑模 $\sigma = 0$ 和滑模 $\bar{\sigma} = y + \int_0^t [\alpha y^l + \gamma y^l] dt = 0$, 对于误差初值 $y(t_0) \neq 0$, 只要 $\bar{\beta} \geq \alpha$, 误差状态沿着滑模 $\sigma = 0$ 运动收敛到零的时间总是比沿着滑模 $\bar{\sigma} = 0$ 运动收敛到零的时间短.

证明 误差状态沿着滑模 $\sigma = 0$ 上运动时的收敛速度为: $\alpha |y| + \bar{\beta} + \gamma |y|^l$.

误差状态沿着滑模 $\bar{\sigma} = 0$ 运动时的收敛速度为: $\alpha |y|^l + \gamma |y|^l$.

因此,当 $|y| > 1$ 时,有 $\alpha |y| + \bar{\beta} + \gamma |y|^l > \alpha |y| + \gamma |y|^l > \alpha |y|^l + \gamma |y|^l$;

当 $|y| \leq 1$ 时,只要 $\bar{\beta} \geq \alpha$, 有 $\alpha |y| + \bar{\beta} + \gamma |y|^l > \bar{\beta} |y|^0 + \gamma |y|^l > \alpha |y|^l + \gamma |y|^l$.

综合以上,可得只要满足 $\bar{\beta} \geq \alpha$, 误差状态沿着滑模 $\sigma = 0$ 运动收敛到零的时间总是比沿着滑模 $\bar{\sigma} = 0$ 运动收敛到零的时间短.

注 2 由定理 2 的证明过程,还可以得到以下结论.

(1) 当 $\beta = \gamma = \bar{\beta}, \bar{l} = \lambda, x_1(t) = y(t)$ 时,有 $t_s < t_{s4} < t_{s2}$.

因为当 $\beta = \gamma = \bar{\beta}, \bar{l} = \lambda, x_1(t) = y(t)$ 时,对于 $|x(t)| = |y(t)| > 1$, 有 $\alpha |y| + \gamma |y|^l > \alpha |x_1| + \beta |x_1|^\lambda > \beta |x_1|^\lambda$; 对于 $|x(t)| = |y(t)| \leq 1$, 有 $\alpha |y| + \bar{\beta} = \alpha |y| + \bar{\beta} |y|^0 > \alpha |x_1| + \beta |x_1|^\lambda > \beta |x_1|^\lambda$.

(2) 当 $\gamma = \bar{\beta} = \beta^{-1/\lambda'}, x_1(t) = y(t)$ 时,有 $t_s < t_{s5}$.

因为当 $\gamma = \bar{\beta} = \beta^{-1/\lambda'}, x_1(t) = y(t)$ 时,对于 $|x(t)| = |y(t)| > 1$, 有 $\gamma |x_1(t)|^l > \beta^{-1/\lambda'} |x_1(t)|^{1/\lambda'}$; 对于 $|x(t)| = |y(t)| \leq 1$, 有 $\bar{\beta} = \beta^{-1/\lambda'} |x_1(t)|^0 > \beta^{-1/\lambda'} |x_1(t)|^{1/\lambda'}$.

2.2 Terminal 滑动模态控制系统设计

针对以上分析,这里采用提出的滑模函数来设计变结构控制器.

对 Terminal 滑模函数(16)求导,可得 $\dot{\sigma} = \dot{y} + \alpha y + \bar{\beta} \operatorname{sgn}(y) + \gamma y^l$, 由误差状态定义和状态方程(1)可得: $\dot{\sigma} = x_2 - \dot{x}_m + \alpha y + \bar{\beta} \operatorname{sgn}(y) + \gamma y^l$, 若 $\dot{\sigma} = 0$, 则可得期望的指令为 $x_{2e} = \dot{x}_m - \alpha y - \bar{\beta} \operatorname{sgn}(y) - \gamma y^l$, 也可得

$$\dot{x}_m = x_{2e} + \alpha y + \bar{\beta} \operatorname{sgn}(y) + \gamma y^l.$$

由于 x_{2e} 含有符号函数,因此是不连续的,为了获得连续可导的信号,引入一阶微分器如下:

$$T\dot{x}_{2r} + x_{2r} = x_{2e}, \quad (19)$$

式中, $T > 0$. 对于一阶微分器(19),可选择 T 的大小, T 尽可能小,使得 x_{2r} 尽可能接近 x_{2e} ,因此有 $x_{2e} = x_{2r} + o(t)$,其中 $o(t)$ 未知变量函数,且 $o(t)$ 有界,即 $|o(t)| \leq \rho$,其中 $\rho > 0$.

由此,对于非线性系统(1),可以得到 Terminal 滑动模态控制器,如以下定理 3 所示.

定理 3 针对给定的非线性系统(1),采用 Terminal 滑模函数(16) 和一阶微分器(19),满足 $\alpha > 1/2$, $\bar{\beta} > \rho$, 如果滑动模态控制器选择如下形式

$$u = -b^{-1}(x)[f(x) - \dot{x}_{2r} + (\alpha' + 1/2)\bar{y} + (\delta + \bar{\beta}')\operatorname{sgn}(\bar{y}) + \gamma'\bar{y}^l]. \quad (20)$$

式中, $\bar{y} = x_2 - x_{2r}$, α' , $\bar{\beta}'$ 和 γ' 均为大于零的正数,则系统状态 x_1 能够在有限时间内跟踪上期望信号 x_m .

证明 首先由 $\bar{y}$ 的定义出发,对 $\bar{y}$ 进行求导,可得 $\dot{\bar{y}} = \dot{x}_2 - \dot{x}_{2r} = f(x) + b(x)u + d(x) - \dot{x}_{2r}$,再将滑动模态控制器(20)代入可得 $\dot{\bar{y}} = d(x) - (\alpha' + 1/2)\bar{y} - (\delta + \bar{\beta}')\operatorname{sgn}(\bar{y}) - \gamma'\bar{y}^l$.

这里选择李亚普诺夫函数为 $V = (y^2 + \bar{y}^2)/2$,对李亚普诺夫函数求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= y\dot{y} + \bar{y}\dot{\bar{y}} = y(x_2 - \dot{x}_m) + \bar{y}[d(x) - (\alpha' + 1/2)\bar{y} - (\delta + \bar{\beta}')\operatorname{sgn}(\bar{y}) - \gamma'\bar{y}^l] = y[x_2 - \\ & x_{2e} - \alpha y - \bar{\beta}\operatorname{sgn}(y) - \gamma y^l] + \bar{y}[d(x) - (\alpha' + 1/2)\bar{y} - (\delta + \bar{\beta}')\operatorname{sgn}(\bar{y}) - \gamma'\bar{y}^l] = y[x_2 - \\ & x_{2r} - o(t) - \alpha y - \bar{\beta}\operatorname{sgn}(y) + \gamma y^l] + \bar{y}[d(x) - (\alpha' + 1/2)\bar{y} - (\delta + \bar{\beta}')\operatorname{sgn}(\bar{y}) - \gamma'\bar{y}^l] = \\ & y[\bar{y} - o(t) - \alpha y - \bar{\beta}\operatorname{sgn}(y) - \gamma y^l] + \bar{y}[d(x) - (\alpha' + 1/2)\bar{y} - (\delta + \bar{\beta}')\operatorname{sgn}(\bar{y}) - \gamma'\bar{y}^l]. \end{aligned}$$

因为 p 和 q 均为正的整数奇数,所以 yy^l 和 $\bar{y}\bar{y}^l$ 均大于零. 由此,可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq y\bar{y} + \rho|y| - \alpha y^2 - \bar{\beta}|y| + \delta|\bar{y}| - (\alpha' + 1/2)\bar{y}^2 - (\delta + \bar{\beta}')|\bar{y}| \leq \\ & -(\alpha - 1/2)y^2 - (\bar{\beta} - \rho)|y| - \alpha'\bar{y}^2 - \bar{\beta}'|\bar{y}| - (y - \bar{y})^2/2 \leq \\ & -(\alpha - 1/2)y^2 - (\bar{\beta} - \rho)|y| - \alpha'\bar{y}^2 - \bar{\beta}'|\bar{y}|. \end{aligned}$$

因为 $\alpha > 1/2$, $\bar{\beta} > \rho$, $\alpha' > 0$, $\bar{\beta}' > 0$, 所以由李亚普诺夫稳定性定理知,误差状态 y 和 $\bar{y}$ 都在有限时间内收敛到原点,即系统状态 x_1 能够在有限时间内跟踪上期望信号 x_m .

滑动模态控制器(20) 含有符号函数,因此滑动模态控制器(20) 是不连续的,这里可以进行连续化处理,用饱和函数代替符号函数,得到如下的连续控制器:

$$u = -b^{-1}(x)[f(x) - \dot{x}_{2r} + (\alpha' + 1/2)\bar{y} + (\delta + \bar{\beta}')\operatorname{sat}(\bar{y}) + \gamma'\bar{y}^l].$$

3 数值仿真结果

为了能够分析本文所提出的 Terminal 滑动模态控制方法的有效性,这里对其他的 Terminal 滑动模态控制器进行数字仿真比较,结果如下.

这里考虑一个简单的二阶动态系统 $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = u + 0.1\sin 20t$, 系统的初始状态取为 $x_1(0) = 1.5$, $x_2(0) = 1$.

选取文献[16]的 Terminal 滑动模态控制方法,这种滑模函数记为 MFTSM,则滑模函数为 $s_{\text{MFTSM}} = x_2 + x_1 + \beta_2(x)$, 式中,

$$\beta_2(x) = \begin{cases} x_1^{3/5}, & \text{若 } \bar{s}_2 = 0 \text{ 或者 } \bar{s}_2 \neq 0, |x_1| \geq 1, \\ 7/5x_1 - 2/5\operatorname{sgn}(x)x_1^2, & \text{若 } \bar{s}_2 \neq 0, |x_1| \leq 1 \end{cases}, \bar{s}_2 = x_2 + x_1 + x_1^{3/5}.$$

同时选取 Terminal 滑模函数(16) 来设计控制器,这种滑模函数记 TSM(16),则滑模函数为

$$s_{\text{TSM}(16)} = x_1 + \int_0^t [x_1^{3/5} + x_1^{5/3}] dt.$$

最后选取本文所提出的 Terminal 滑动模态控制方法,并把本文所提出的 Terminal 滑模函数为 FITSM,则滑模函数为 $s_{\text{FITSM}} = x_1 + \int_0^t [x_1 + \operatorname{sgn}(x_1) + x_1^{5/3}] dt$.

利用以上 3 种 Terminal 滑模,所设计的变结构控制器分别为如下形式:

(1) MFTSM 控制器

当 $\bar{s}_2 = 0$, 或 $\bar{s}_2 \neq 0$ 且 $|x_1| \geq 1$ 时, 控制器为 $u = -\left[x_2 + \frac{3}{5}x_2x_1^{-2/5} + 0.5\text{sat}(s_{\text{MFTSM}})\right]$;

当 $\bar{s}_2 \neq 0$ 且 $|x_1| \leq 1$ 时, 控制器为 $u = -\left[x_2 + \frac{7}{5}x_2 - \frac{2}{5}x_1x_2\text{sat}(x_1) + 0.5\text{sat}(s_{\text{MFTSM}})\right]$.

(2) TSM(16) 控制器

$u = -[\dot{x}_{2r} + e + 0.5\text{sat}(e)]$, $\dot{x}_{2r} = -10x_{2r} + 10x_{2c}$, $x_{2c} = -[x_1^{3/5} + x_1^{5/3} + s_{\text{TSM}(16)} + 0.5\text{sat}(s_{\text{TSM}(16)})]$.

(3) FITSM 控制器

$$u = [-\dot{x}_{2r} + e + 0.5\text{sat}(e) + e^{5/3}], \dot{x}_{2r} = -10x_{2r} + 10x_{2c}, \\ x_{2c} = -[x_1 + \beta\text{sat}(x_1) + x_1^{5/3} + s_{\text{FITSM}} + \text{sat}(s_{\text{FITSM}})].$$

以上所选取的 3 种 Terminal 滑动模态控制器的控制参数保持一致. 在这 3 个滑动模态控制器的作用下, 系统状态和控制器输入的变化曲线如图 1~3 所示.

从图 1 和图 2 中, 可以看出, 在这 3 种 Terminal 滑动模态控制器的作用下, 系统状态都分别在有限时间内收敛到原点. 系统状态从初始值 $[1.5, 1]$ 分别进入到区域 $\{x_1(t) \mid |x_1(t)| \leq 0.01\}$ 和 $\{x_2(t) \mid |x_2(t)| \leq 0.01\}$ 的收敛时间如表 1 所示. 从表 1 上看出, 本文所提出的滑动模态控制器是最有效的, 状态 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 收敛的时间最短, 而 MFTSM 控制器下的状态 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 收敛的时间最长, TSM(16) 控制器的收敛时间居中, 但比较接近本文所提出的滑动模态控制器的效果.

从图 3 中可以看出, 3 种控制器均没有产生奇异问题, 都是连续的. 但是三种控制输入相比, MFTSM 控制器需要的控制能量最小, 而本文的滑动模态控制器的控制能量最大, TSM(16) 控制器仍居中, 同样需要能量比较接近本文的滑动模态控制器.

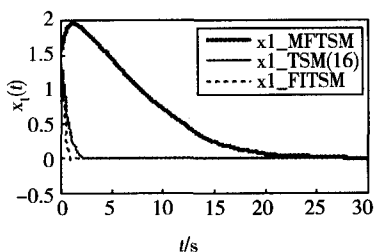


图1 3种滑动模态控制器作用下的
状态 $x_1(t)$ 的变化曲线

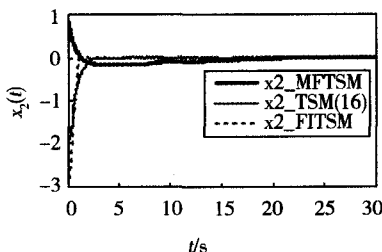


图2 3种滑动模态控制器作用下的
状态 $x_2(t)$ 的变化曲线

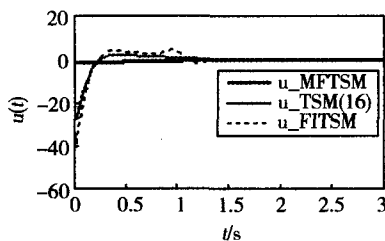


图3 3种滑动模态控制器作用下的
控制输入变化曲线

表 1 3 种滑动模态控制器作用下系统状态收敛时间

	FMTSM 控制	TSM(16)控制	FITSM 控制
$x_1(t)$ 的收敛时间/s	28.84	2.32	1.07
$x_2(t)$ 的收敛时间/s	25.15	2.71	1.92

4 结 论

本文针对系统状态在 Terminal 滑动模态收敛问题, 提出一种新的快速积分型 Terminal 滑模函数设计方法, 并和其他形式的 Terminal 滑模函数比较, 进一步加快了系统状态或误差状态在滑动模态的收敛时间.

利用本文所设计的快速积分型 Terminal 滑模函数, 给出了变结构控制器设计方法, 并基于李亚普诺夫稳定性理论, 严格证明了系统在有限时间收敛的稳定性.

基于数字仿真, 和其他的 Terminal 滑动模态控制器进行了对比分析, 进一步验证了本文所提出的 Terminal 滑动模态控制器的有效性.

参 考 文 献

- [1] Utkin V I. Sliding modes in control optimization [M]. Berlin, Heidelberg, 1992: 1-10.

- [2] Yurl B S, James M B. Continuous sliding mode control[C]. Proceedings of American Control Conference, Atlanta, 1988.
- [3] Venkataraman S T, Gulati S. Terminal sliding modes: a new approach to nonlinear control systems[C]. Proceedings on 5th International Conference on Advanced Robot, Pisa, 1991.
- [4] Yu X, Man, M B. Model reference adaptive control systems with terminal sliding modes[J]. International Journal of Control, 1996, 64(6):1165-1176.
- [5] Wu Y, Yu X, Man Z. Terminal sliding mode control design for uncertain dynamic systems[J]. Systems and Control Letters, 1998, 34(5):281-288.
- [6] Yu S, Yu X, Shirinzadeh B, et al. Continuous finite-time control for manipulators with terminal sliding mode[J]. Automatica, 2005, 41(11):1957-1964.
- [7] Yu X, Man Z. Fast terminal sliding mode control design for nonlinear dynamic systems[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, 2002, 49(2):261-264.
- [8] Feng Y, Yu X, Man Z. Non-singular terminal sliding mode control of rigid manipulator[J]. Automatica, 2002, 38(12):2159-2167.
- [9] Tie L, Cai K. A general form and improvement of fast terminal sliding mode[C]. Proceedings of the 8th World Congress on Intelligent Control and Automation, Jinan, 2010.
- [10] Yang J, Li S, Su J, et al. Continuous nonsingular terminal sliding mode control for systems with mismatched disturbances[J]. Automatica, 2013, 49(7):2287-2291.
- [11] Feng Y, Han F, Yu X. Chattering free full-order sliding-mode controls[J]. Automatica, 2014, 50(4):1310-1314.
- [12] Park K, Tsuji T. Terminal sliding mode control of second-order nonlinear uncertain system[J]. International Journal of Robust and Non-linear Control, 1999, 9(11):769-780.
- [13] Zhao G, Song Z. Based on fuzzy terminal sliding mode variable structure control strategy[C]. 2010 International Conference on Intelligent Computation Technology and Automation, Changsha, 2010.
- [14] Man Z, Yu X. Terminal sliding mode control of MIMO linear systems[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, 1997, 44(11):1065-1070.
- [15] Wang L, Chai T, Zhai L. Neural-network-based on terminal sliding mode control of robotic manipulators including actuator dynamics [J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2009, 56(9):3296-3304.
- [16] Zou A, Kumar K D, Hou Z, et al. Finite-time attitude tracking control for spacecraft using terminal sliding mode and chebyshev neural network[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part B: Cybernetics, 2011, 41(4):950-963.
- [17] Lu K, Xia Y. Adaptive attitude tracking control for rigid spacecraft with finite-time convergence[J]. Automatica, 2013, 49(12):3591-3599.
- [18] Yu S, Yu X, Shirinzadeh B, et al. Continuous finite-time control for manipulators with terminal sliding mode[J]. Automatica, 2005, 41(11):1957-1964.
- [19] Chang E C, Liang T J, Chen J F, et al. Real-time implementation of grey fuzzy terminal sliding mode control for PWM DC-AC converters[J]. IET Power Electronics, 2008, 1(2):235-244.
- [20] Chiu C. Derivative and integral terminal sliding mode control for a class of MIMO nonlinear systems[J]. Automatica, 2012, 48(2):316-326.
- [21] 王高雄,周之铭. 常微分方程[M]. 北京:高等教育出版社, 2006.

An Integral Trminal Sliding Mode Controller for Nonlinear System

GUO Jianguo, JIA Qichen, ZHOU Jun

(Institute of Precision Guidance and Control, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: This paper presents a global nonsingular fast integral terminal sliding mode (FITSM) controller for a nonlinear dynamical system. A novel FITSM is first proposed to accelerate convergence rate to the equilibrium point in a sliding manifold, according to the results of terminal sliding modes. Also it addresses the singularity problem accompanied by the conventional terminal sliding mode control. Additionally, the time taken to reach the equilibrium point from any initial state in the sliding mode is guaranteed to be finite. Secondly, combined with backstepping method, the sliding mode controller is designed for the nonlinear system with uncertainty and disturbance. This is followed by analysis of simulation results of the proposed terminal sliding mode controller.

Keywords: Terminal sliding mode; finite-time stability; Lyapunov stability; backstepping method