

Camassa-Holm 方程在孤波附近的解

丁丹平, 陆伟

(江苏大学 理学院, 江苏 镇江 212013)

摘 要:通过伪共性变换,将 Camassa-Holm 方程在孤波 Q 附近的解做如下分解: $\lambda^{1/2}(t)u(t, \lambda(t)y + x(t)) = Q(y) + \epsilon(t, y)$,得到了估计式 $|\epsilon(t, y)| \leq Ca_3 Te^{-\theta|y|} + |\lambda^{1/2}(t)\epsilon_0|$. 在 H^2 空间下,若初值和孤波解 Q 充分接近,则随着 $y \rightarrow \infty$,对应解仍然和孤波解充分接近且余量 ϵ 的能量分布与孤波 Q 保持一致.

关键词:Camassa-Holm 方程;伪共性变换;解的分解;孤波解

中图分类号:O175.3

文献标志码:A

1993 年, Camassa 和 Holm 导出了一个非线性色散浅水波方程:

$$u_t - u_{xxt} + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx} \quad (1)$$

称为 Camassa-Holm 方程. 其中, $u(t, x)$ 表示水波在 x 方向上关于时间 t 的流体速度, 或等价于水平底部到水波自由表面的高度. 方程(1)具有双哈密顿结构^[1-2]且属于完全可积系统^[3-4]. 除光滑解之外, 方程(1)还有一大类奇异孤波解: 尖峰孤立子 (peakon)、尖角子 (cuspon)、平坡子 (stumpson) 和复合波 (composite wave) 等^[3, 5-6]. 它的孤立波是稳定孤波^[7-8], 在相互作用后仍保持它们的形状和结构^[9]. 方程(1)存在爆破解^[10-12].

2000 年, Constantin 和 Strauss 利用方程(1)的哈密顿结构和守恒量, 得到了在 $H^1(\mathbf{R})$ 范数意义下, CH 方程的孤波具有轨道稳定性的结果:

如果 $u \in C([0, T]; H^1(\mathbf{R}))$ 是方程(1)的一个解且 $\|u(0, \cdot) - c\phi\|_{H^1} < (\epsilon/3c)^4$, $0 < \epsilon < c$, 那么 $\|u(t, \cdot) - c\phi(\cdot - \varphi(t))\|_{H^1} < \epsilon$, $t \in (0, T)$, 其中 $c\phi(x - ct) = ce^{-|x-ct|}$, $c \in \mathbf{R}$ 是方程(1)的孤波且 $\varphi(t) \in \mathbf{R}$ 是任意使函数 $u(t, \cdot)$ 达到最大值的点^[8]. 这一稳定性的结果可以考虑孤波附近解的表达与描述.

本文研究如下 Camassa-Holm (CH) 方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xxt} + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}, & (t, x) \in [0, T) \times \mathbf{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbf{R}. \end{cases} \quad (2)$$

对于所有的 $t \in [0, T)$, $E_1(u(t)) = \frac{1}{2} \int (u^2 + u_x^2) dx = E_{10}$ 与 $E_2(u(t)) = \frac{1}{2} \int (u^3 + uu_x^2) dx = E_{20}$ 为守恒量, 其中 $E_{10} = E_1(u_0)$ 和 $E_{20} = E_2(u_0)$. 始终假设初始能量 $E_{10} > 0$.

注意到方程(1)有如下的不变性:

(A) 平移不变性: 如果 $u(t)$ 是方程(1)的一个解, 那么 $u(t, \cdot + x_0)$ 也是一个解.

(B) 伸缩不变性: 如果 $u(t)$ 是方程(1)的一个解, 那么 $\lambda_0 u(\lambda_0 t, x)$ 也是一个解.

受文献[13-15]的启发, 通过构造适当的变换, 将 CH 方程 Cauchy 问题在孤波 Q 附近的解分解为如下形式:

$$\lambda^{1/2}(t)u(t, \lambda(t)y + x(t)) = Q(y) + \epsilon(t, y), \quad (3)$$

其中 $\lambda(t)$ 满足假设(H): 存在常数 λ_1, λ_2 使得 $0 < \lambda_1 \leq \lambda(t) \leq \lambda_2$, $t \in [0, T)$.

收稿日期: 2018-01-25; 修回日期: 2018-05-23.

基金项目: 国家自然科学基金(11371175)

作者简介: 丁丹平(1965—), 男, 江苏丹阳人, 江苏大学教授, 博士, 研究方向为 Camassa-Holm 方程, E-mail: ddp@ujs.edu.cn.

通信作者: 陆伟(1993—), 男, 江苏连云港人, 江苏大学硕士研究生, E-mail: 1090503798@qq.com.

文中 $\Delta f = \frac{1}{2}f + yf'$ 表示 L^2 空间上的算子, $(f, g) = \int_{\mathbf{R}} f(x)g(x)dx$ 为 L^2 上的内积, 记 $\int_{\mathbf{R}} dx$ 为 $\int$.

1 预备知识

1.1 CH 方程的孤波解

方程(1)通过孤波变换 $u(t, x) = Q(x - ct)$, 可以导出孤波方程 $Q^2 = Q_x^2$, 其中 $Q(x) = ce^{-|x-ct|}$ [3].

1.2 平移与伸缩参数的选择

从关于 CH 方程解的平移不变性和伸缩不变性退化的角度考虑, 需要在线性化方程(1)之前介绍参数 $\lambda(t)$ 和 $x(t)$.

对 $t \in [0, T)$, 选择 $\lambda(t)$ 和 $x(t)$ 使满足 $\epsilon(t) \perp Q_x$ 和 $\epsilon(t) \perp \Delta Q$.

对 $u \in H^2(\mathbf{R})$, $\hat{\lambda} > 0$ 和 $\hat{x} \in \mathbf{R}$, 定义:

$$\epsilon_{\hat{\lambda}, \hat{x}}(y) = \hat{\lambda}^{1/2} u(\hat{\lambda}y + \hat{x}) - Q(y). \quad (4)$$

设 $\alpha > 0$, 考虑孤波 Q 附近半径为 α 的邻域: $U_\alpha = \{u \in H^2(\mathbf{R}); \inf_r \|u(\cdot) - Q(\cdot + r)\|_{H^2} \leq \alpha\}$.

性质 1(调整参数的选择) 存在 $\alpha_1 > 0$, $\tilde{\lambda} > 0$ 和唯一一个 C^1 映射 $(\hat{\lambda}, \hat{x}): U_{\alpha_1} \rightarrow (1 - \tilde{\lambda}, 1 + \tilde{\lambda}) \times \mathbf{R}$, 使得假设 $u \in U_{\alpha_1}$ 且 $\epsilon_{\hat{\lambda}, \hat{x}}$ 由(4)式给出, 则

$$\epsilon_{\hat{\lambda}, \hat{x}} \perp Q_x, \epsilon_{\hat{\lambda}, \hat{x}} \perp \Delta Q. \quad (5)$$

进一步, 若存在常数 $C_1 > 0$ 使得 $u \in U_\alpha$, $0 < \alpha < \alpha_1$, 则有

$$\|\epsilon_{\hat{\lambda}, \hat{x}}\|_{H^2} \leq C_1 \alpha, \quad |\hat{\lambda} - 1| \leq C_1 \alpha. \quad (6)$$

证明 定义函数 $\rho_{\hat{\lambda}, \hat{x}}^1 = \int \epsilon_{\hat{\lambda}, \hat{x}} Q_x$, $\rho_{\hat{\lambda}, \hat{x}}^2 = \int \epsilon_{\hat{\lambda}, \hat{x}} (\Delta Q)$. 因为 $\frac{\partial \epsilon_{\hat{\lambda}, \hat{x}}}{\partial \hat{x}} \bigg|_{\hat{\lambda}=1, \hat{x}=0} = u_x$, $\frac{\partial \epsilon_{\hat{\lambda}, \hat{x}}}{\partial \hat{\lambda}} \bigg|_{\hat{\lambda}=1, \hat{x}=0} = \frac{u}{2} + xu_x$, 所以 $\frac{\partial \rho_{\hat{\lambda}, \hat{x}}^1}{\partial \hat{x}} \bigg|_{\hat{\lambda}=1, \hat{x}=0, u=Q} = \int Q_x^2$, $\frac{\partial \rho_{\hat{\lambda}, \hat{x}}^1}{\partial \hat{\lambda}} \bigg|_{\hat{\lambda}=1, \hat{x}=0, u=Q} = \int (\Delta Q) Q_x$, $\frac{\partial \rho_{\hat{\lambda}, \hat{x}}^2}{\partial \hat{x}} \bigg|_{\hat{\lambda}=1, \hat{x}=0, u=Q} = \int Q_x (\Delta Q)$, $\frac{\partial \rho_{\hat{\lambda}, \hat{x}}^2}{\partial \hat{\lambda}} \bigg|_{\hat{\lambda}=1, \hat{x}=0, u=Q} = \int (\Delta Q)^2$.

因为雅可比行列式 $\begin{vmatrix} \int Q_x^2 & \int (\Delta Q) Q_x \\ \int Q_x (\Delta Q) & \int (\Delta Q)^2 \end{vmatrix} \neq 0$, 所以, 由隐函数定理可知, 存在 $\bar{\alpha} > 0$ 和平面 $\mathbf{R}^2$ 内点

$(1, 0)$ 处的一个邻域 $V_{1,0}$ 以及唯一一个 C^1 映射 $(\hat{\lambda}, \hat{x}): \{u \in H^2(\mathbf{R}); \|u(\cdot) - Q(\cdot + r)\|_{H^2} < \bar{\alpha}\} \rightarrow V_{1,0}$ 满足(5)式.

如果 $\|u - Q\|_{H^2} < \alpha \leq \bar{\alpha}$, 不妨取邻域 $V_{1,0}$ 的半径为 $C\alpha$, $C > 0$, 那么 $|\hat{\lambda} - 1| + |\hat{x}| \leq C\alpha$. 由(4)式知, $\|\epsilon_{\hat{\lambda}, \hat{x}}\|_{H^2} \leq C\alpha$. 从 $\{u \in H^2(\mathbf{R}); \|u(\cdot) - Q(\cdot + r)\|_{H^2} \leq \alpha\}$ 延伸映射 $(\hat{\lambda}, \hat{x})$ 到管道 U_α . 再次使用隐函数定理可知, 存在 $\alpha_1 < \bar{\alpha}$ 以及一个 C^1 映射 $r: U_{\alpha_1} \rightarrow \mathbf{R}$, 对所有的 $u \in U_{\alpha_1}$ 有 $\|u(\cdot) - Q(\cdot + r)\|_{H^2} = \inf_r \|u(\cdot) - Q(\cdot + r)\|_{H^2} < \alpha_1 < \bar{\alpha}$. 那么, 函数 $\hat{\lambda}(u) = \hat{\lambda}(u(\cdot + r(u)))$ 和 $\hat{x}(u) = \hat{x}(u(\cdot + r(u))) + r(u)$ 满足(5)及(6)式.

性质 1 得证.

对 $u(t) \in U_{\alpha_1}$, $t \in [0, T)$, 定义如下的 $\lambda(t)$ 和 $x(t)$ 使满足:

$$\epsilon(t) = \epsilon_{\lambda(t), x(t)}, \quad (7)$$

使得 $(\epsilon(t), Q_x) = (\epsilon(t), \Delta Q) = 0$.

引理 1 若 $\|u_0 - Q\|_{H^1} \leq \tau_1$, 那么 $\|\epsilon(t)\|_{H^1}^2 \leq C_1 \tau_1^2 + C_2$, $t \in [0, T)$.

证明 因 $u_0 = Q + \epsilon(0) = Q + \epsilon_0$, 故 $\lambda(0) = 1$ 和 $x(0) = 0$. 由 $v(t, y) = \lambda^{1/2}(t)u(t, \lambda(t)y + x(t)) = Q(y) + \epsilon(t, y)$ 和假设(H), 能够得到

$$E_1(u(t, x)) = E_1(\lambda^{-1/2}(t)v(t, y)) = \frac{1}{2}\lambda^{-1}(t) \int (Q + \epsilon)^2 + (Q + \epsilon)_x^2 dx =$$

$$\lambda^{-2}(t) \left[\frac{1}{2} \|\epsilon\|_{H^1}^2 + \int Q^2 + \int Q\epsilon + \int Q_y \epsilon_y \right] = E_1(u_0).$$

因为 $\|\epsilon_0\|_{H^1} = \|u_0 - Q\|_{H^1}$, 那么 $E_1(u_0) = E_1(Q + \epsilon_0) = \frac{1}{2} \|\epsilon_0\|_{H^1}^2 + \int Q^2 + \int Q\epsilon_0 + \int Q_y \epsilon_{0,y}$. 有

$$\frac{1}{2} \|\epsilon\|_{H^1}^2 + \int Q^2 + \int Q\epsilon + \int Q_y \epsilon_y = \lambda^2(t) E_1(u_0), \text{ 即 } \|\epsilon\|_{H^1}^2 \leq \lambda^2(t) \|\epsilon_0\|_{H^1}^2 + 2\lambda(t) \|Q\|_{L^1} \|\epsilon_0\|_{H^1} + 12 \|Q\|_{L^2}^2.$$

引理 2 假设 $u(t)$ 是 Cauchy 问题(2)满足 $u_0 \in H^2(\mathbf{R})$ 的解且 $T < \sqrt{2}/(3\|u_0\|_{H^2})$, 那么 $\|u\|_{H^2}^2 \leq C\|u_0\|_{H^2}^2, t \in [0, T)$.

证明 在方程(1)式两边同乘以因式 $u - u_{xx}$ 得:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} u^2 + u_x^2 + \frac{1}{2} u_{xx}^2 \right) - \frac{d}{dx} (uu_{xt} + u_x u_t) = \frac{d}{dx} (u^2 u_{xx} -$$

$$u^3 - \frac{1}{2} uu_{xx}^2 + \frac{3}{2} uu_x^2) - \frac{3}{2} (u_x u_{xx}^2 + u_x^3). \quad (8)$$

在 $\mathbf{R}$ 上关于 x 积分(8)式得:

$$\frac{d}{dt} \int \left(\frac{1}{2} u^2 + u_x^2 + \frac{1}{2} u_{xx}^2 \right) = - \frac{3}{2} \int u_x (u_x^2 + u_{xx}^2). \quad (9)$$

对(9)式估计得:

$$\frac{d}{dt} \int \left(\frac{1}{2} u^2 + u_x^2 + \frac{1}{2} u_{xx}^2 \right) \leq \frac{3}{2} \int |u_x| (u_x^2 + u_{xx}^2) \leq 3\sqrt{2} \left[\int \left(\frac{1}{2} u^2 + u_x^2 + \frac{1}{2} u_{xx}^2 \right) \right]^{3/2}. \quad (10)$$

在区间 $[0, t]$ 上关于变量 t 积分(10)式得: $\int \left(\frac{1}{2} u^2 + u_x^2 + \frac{1}{2} u_{xx}^2 \right) \leq \frac{1}{[1 - (3\sqrt{2}t\|u_0\|_{H^2})/2]^2} \int \left(\frac{1}{2} u_0^2 + u_{0,x}^2 + \frac{1}{2} u_{0,xx}^2 \right)$. 从而,

$$\|u\|_{H^2}^2 \leq C\|u_0\|_{H^2}^2. \quad (11)$$

考虑 $u_0 \in H^2(\mathbf{R})$ 满足 $\|u_0 - Q\|_{H^2} \leq \tau_2, t \in [0, T), u(t)$ 是 Cauchy 问题(2) 的解. 从而, 存在 $C_1, C_2 > 0$, 使得 $C_1 \leq \|u(t)\|_{H^2} \leq C_2, t \in [0, T)$.

性质 2 若 $\epsilon(t)$ 由(7)式给出, 则 (P_1) 正交条件: $(\epsilon(t, x), Q_x) = (\epsilon(t, x), \Lambda Q) = 0, t \in [0, T); (P_2)$ 若 $\|u_0 - Q\|_{H^2} \leq \tau_2$, 那么 $\|\epsilon(t)\|_{H^2}^2 \leq C_1 \tau_2^2 + C_2, t \in [0, T); (P_3)$ 对 $\forall \sigma > 0, \exists R_0(\sigma) > 0$, 使得 $\|\epsilon(t)\|_{L^2(|y| > R_0)} \leq \sigma, t \in [0, T)$.

证明 事实上, 由(7)式和性质 1 知 (P_1) 成立(即 $\lambda(t)$ 和 $x(t)$ 参数的选择); 由(7) 式和函数 $u(t, x), Q$ 的 L^2 可积性可以导出 (P_3) .

由 $v(t, y) = \lambda^{-1/2}(t)u(t, \lambda(t)y + x(t)) = Q(y) + \epsilon(t, y)$ 和不等式(11)可得 $\|\lambda^{-1/2}(t)[Q + \epsilon]\|_{H^2}^2 \leq C\|Q + \epsilon_0\|_{H^2}^2$, 即

$$\|Q\|_{H^2}^2 + \|\epsilon\|_{H^2}^2 + \int (2Q\epsilon + 2Q_y \epsilon_y + 2Q_{yy} \epsilon_{yy}) \leq \lambda^4(t) C [\|Q\|_{H^2}^2 +$$

$$\|\epsilon_0\|_{H^2}^2 + \int (2Q\epsilon_0 + 2Q_y \epsilon_{0,y} + 2Q_{yy} \epsilon_{0,yy})].$$

通过假设(H)和 Young 不等式, 有

$\|\epsilon\|_{H^2}^2 \leq \lambda^4(t) C \|\epsilon_0\|_{H^2}^2 + [\lambda^4(t) C + \lambda^2(t)] \|\epsilon_0\|_{H^1}^2 + [2\lambda(t) \|Q\|_{L^1}] \|\epsilon_0\|_{H^1} + 14 \|Q\|_{L^2}^2$,
即 $\|\epsilon\|_{H^2}^2 \leq C_1 \|\epsilon_0\|_{H^2}^2 + C_2$. 因此, (P_2) 成立.

1.3 研究方法

首先, 将方程(1)改写成如下的弱形式:

$$u_t = (I - \partial_x^2)^{-1} (2u_x u_{xx} + uu_{xxx} - 3uu_x) = \frac{1}{2} p(x) * (2u_x u_{xx} + uu_{xxx} - 3uu_x), \quad (12)$$

其中: $p(x) = e^{-|x|}$ 为 Poisson 核的 Fourier 变换, $*$ 表示空间卷积.

其次, 将分解式(3)通过方程(12)式得到 ϵ 的控制方程:

$$\epsilon_t = \frac{\lambda_t}{\lambda} (\Lambda Q + \Lambda \epsilon) + \frac{x_t}{\lambda} (Q_y + \epsilon_y) + D, \quad (13)$$

$$\text{其中: } D = \frac{1}{2} \left\{ e^{-|y|} * \left[\lambda^{-5/2} [(Q + \epsilon)_y^2]_y + \lambda^{-5/2} (Q + \epsilon)_{yyy} - \frac{3}{2} \lambda^{-1/2} [(Q + \epsilon)^2]_y \right] \right\}.$$

最后, 利用 $p(x) = e^{-|x|}$ 和孤波 Q 的指数衰减性对 ϵ 的控制方程进行估计.

2 ϵ 控制方程和参数的估计

2.1 Q 附近的线性化方程

分别令

$$v(t, y) = \lambda^{1/2}(t) u(t, \lambda(t)y + x(t)), \quad (14)$$

$$\epsilon(t, y) = v(t, y) - Q(y) = \lambda^{1/2}(t) u(t, \lambda(t)y + x(t)) - Q(y), \quad (15)$$

其中, 如果 $y = (x - x(t))/\lambda(t)$, 那么 $u(t, \lambda(t)y + x(t))$ 是方程(1)的解.

由(14)式知:

$$\begin{aligned} v_t(t, y) &= \frac{1}{2} \lambda_t \lambda^{-1/2}(t) u(t, \lambda(t)y + x(t)) + \lambda^{1/2}(t) u_t(t, \lambda(t)y + x(t)) + \\ &\quad \lambda_t y \lambda^{1/2}(t) u_x(t, \lambda(t)y + x(t)) + \lambda^{1/2}(t) x_t u_x(t, \lambda(t)y + x(t)), \\ v_y(t, y) &= \lambda^{3/2}(t) u_x(t, \lambda(t)y + x(t)), v_{yy}(t, y) = \lambda^{5/2}(t) u_{xx}(t, \lambda(t)y + x(t)), \\ v_{yyy}(t, y) &= \lambda^{7/2}(t) u_{xxx}(t, \lambda(t)y + x(t)). \end{aligned}$$

从而得到关于 v 的方程:

$$\begin{aligned} \lambda^{-1/2}(t) v_t - \lambda_t \lambda^{-3/2}(t) \left(\frac{v}{2} + y v_y \right) - \lambda^{-3/2}(t) x_t v_y = \\ \frac{1}{2} \lambda(t) e^{-|y|} * [2\lambda^{-4}(t) v_y v_{yy} + \lambda^{-4}(t) v v_{yyy} - 3\lambda^{-2}(t) v v_y]. \end{aligned}$$

$$\text{进一步得到: } v_t = \frac{\lambda_t}{\lambda} \left(\frac{v}{2} + y v_y \right) + \frac{x_t}{\lambda} v_y + \frac{1}{2} e^{-|y|} * [2\lambda^{-5/2}(t) v_y v_{yy} + \lambda^{-5/2}(t) v v_{yyy} - 3\lambda^{-1/2}(t) v v_y].$$

将 $v(t, y) = Q(y) + \epsilon(t, y)$ 代入上式可得 ϵ 的控制方程(13)式.

2.2 参数的方程和估计

命题 1 (λ_t 和 x_t 的方程) 存在 $\alpha_2 \in (0, \alpha_1)$, 使得 $u(t) \in U_{\alpha_2}$, $t \in [0, T]$, 则 λ 和 x 是时间 t 的 C^1 函数, 且

$$\frac{\lambda_t}{\lambda} \int y Q \epsilon + \frac{x_t}{\lambda} \left(- \int Q^2 - \int Q_y \epsilon_y \right) = (Q_y, D), \quad (16)$$

$$\frac{\lambda_t}{\lambda} \left(- \frac{1}{4} \int Q^2 - \frac{3}{4} \int Q \epsilon + \int y^2 Q \epsilon \right) + \frac{x_t}{\lambda} \int y Q \epsilon = (\Lambda Q, D). \quad (17)$$

证明 Q_y 和 ΛQ 分别与 ϵ 的控制方程(13)式作内积, 由分部积分计算可得(16)和(17)式.

对 $u(t) \in U_{\alpha_2}$, $t \in [0, T]$, 若 $\|\epsilon\|_{H^1}$ 足够小, 那么, 通过(6)式和上述的 α_2 可以得到

$$p(t) =: \left(\int y Q \epsilon \right)^2 + \left(\int Q^2 + \int Q_y \epsilon_y \right) \left(- \frac{1}{4} \int Q^2 - \frac{3}{4} \int Q \epsilon + \int y^2 Q \epsilon \right) < - \frac{1}{8} \left(\int Q^2 \right)^2. \quad (18)$$

从而, 可以得到如下关于 λ_t/λ 和 x_t/λ 的有界性:

引理 3 (参数的估计) 存在 $\alpha_2 \in (0, \alpha_1)$, 使得 $u(t) \in U_{\alpha_2}$, $t \in [0, T]$, 则

$$\left| \frac{\lambda_t}{\lambda} \right| + \left| \frac{x_t}{\lambda} \right| \leq C_1 \|\epsilon_0\|_{H^1}^2 + C_2. \quad (19)$$

证明 由(16)、(17)和(18)式可知: $\lambda_t/\lambda = p_1(t)/p(t)$ 和 $x_t/\lambda = p_2(t)/p(t)$, 其中:

$$p_1(t) = (Q_y, D) \int y Q \epsilon + (\Lambda Q, D) \left(\int Q^2 + \int Q_y \epsilon_y \right),$$

$$p_2(t) = (\Lambda Q, D) \int y Q \epsilon + (Q_y, D) \left(\frac{1}{4} \int Q^2 + \frac{3}{4} \int Q \epsilon - \int y^2 Q \epsilon \right).$$

因为 $|p_1(t)| \leq C_1 \|\epsilon_0\|_{H^1}^2 + C_2$ 和 $|p_2(t)| \leq C_1 \|\epsilon_0\|_{H^1}^2 + C_2$, 所以引理3得证.

3 定理及其证明

令 $f_1(t, y) = \frac{\lambda_t}{\lambda} \left(\frac{Q}{2} + y Q_y \right)$, $f_2(t, y) = \frac{x_t}{\lambda} Q_y + D$, 则方程(13)式可改写为

$$\epsilon_t - \frac{x_t}{\lambda} \epsilon_y = \frac{\lambda_t}{\lambda} \left(\frac{\epsilon}{2} + y \epsilon_y \right) + f_1 + f_2. \quad (20)$$

为了移除 $(\lambda_t/\lambda)(\epsilon/2 + y \epsilon_y)$ 这一项, 引进变换:

$$\eta(t, x) = \lambda^{-1/2}(t) \epsilon(t, \lambda^{-1}(t)x). \quad (21)$$

$$\text{记 } g_1(t, x) = \lambda^{-1/2} \cdot \frac{\lambda_t}{\lambda} \left(\frac{Q(\lambda^{-1}x)}{2} + x Q_x(\lambda^{-1}x) \right), g_2(t, x) = \lambda^{1/2} \cdot \frac{x_t}{\lambda} Q_x(\lambda^{-1}x) + \bar{D}, \text{ 其中: } \bar{D} = \frac{1}{2} \lambda^{-1} \cdot e^{-|x|} * \{ [(Q(\lambda^{-1}x) + \lambda^{-1/2} \eta)_x^2] + [Q(\lambda^{-1}x) + \lambda^{-1/2} \eta][Q(\lambda^{-1}x) + \lambda^{-1/2} \eta]_{xx} - \frac{3}{2} [(Q(\lambda^{-1}x) + \lambda^{-1/2} \eta)^2]_x \},$$

则等式(20)可转化为

$$\eta_t - x_t \eta_x = \lambda^{-1/2} f_1(t, \lambda^{-1}x) + \lambda^{-1/2} f_2(t, \lambda^{-1}x) = g_1(t, x) + g_2(t, x). \quad (22)$$

令序列 (t_n) 满足 $t_n \in [0, T)$ 且 $t_n \rightarrow 0$. 对 $n \in \mathbf{N}$, 定义 η_n 为:

$$\eta_n(t, x) = \eta(t + t_n, x), \quad (23)$$

那么, 由(22)式知: $(\eta_n)_t - x_t(t + t_n)(\eta_n)_x = g_1(t + t_n) + g_2(t + t_n)$, $(t, x) \in [0, T) \times \mathbf{R}$ 和 $\eta_n(0, x) = \eta(t_n, x)$, $x \in \mathbf{R}$. 记 $a_1 = \sup_{t \in [0, T)} \|\epsilon(t)\|_{L^2}$, $a_2 = \sup_{t \in [0, T)} \|\epsilon(t)\|_{H^1}$, $a_3 = \sup_{t \in [0, T)} \|\epsilon(t)\|_{H^2}$, 其中 $\epsilon(t)$ 由(15)式给出.

性质3 若 $\eta(t)$ 由(21)式给出, 则存在序列 $t_n \rightarrow 0$ 和 $\eta_T \in H^2(\mathbf{R})$ 满足

$$\text{当 } n \rightarrow +\infty \text{ 时, } \eta(t_n) \xrightarrow{\text{强}} \eta_T, \text{ 在 } L^2(\mathbf{R}) \text{ 上.}$$

证明 注意到 $\|\eta(t)\|_{L^2} = \|\epsilon(t)\|_{L^2}$ 和 $\|\eta_x(t)\|_{L^2} = \lambda^{-1}(t) \|\epsilon_y(t)\|_{L^2}$ 以及 $\|\eta_{xx}(t)\|_{L^2} = \lambda^{-1}(t) \|\epsilon_{yy}(t)\|_{L^2}$, 所以,

$$\|\eta(t)\|_{H^2} \leq \lambda^{-1} a_3, t \in [0, T). \quad (24)$$

令 (t_n) 为满足 $t_n \rightarrow 0$ 的序列. 通过假设(H)和(P₃), $\eta(t_n)$ 满足:

$$\forall \sigma > 0, \exists R'_0(\sigma), \|\eta(t_n)\|_{L^2(|y| > R'_0)} \leq \sigma. \quad (25)$$

由(24)式知: $\|\eta(t_n)\|_{H^2} \leq C a_3$.

因为 $H^2(\mathbf{R})$ 可以嵌入到 $L^2_{\text{loc}}(\mathbf{R})$, 所以, 存在 (t_n) 的一个序列, 仍不妨记为 (t_n) 和存在一个函数 $\eta_T \in L^2_{\text{loc}}(\mathbf{R})$ 满足: 在 $L^2_{\text{loc}}(\mathbf{R})$ 上, $\eta(t_n) \rightarrow \eta_T, n \rightarrow +\infty$. 因为 $\|\eta(t_n)\|_{H^2} \leq C a_3, \eta_T \in H^2(\mathbf{R})$ 和 $\|\eta_T\|_{H^2} \leq C a_3$, 所以, 由(25)式可得: 当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $\eta(t_n) \xrightarrow{\text{强}} \eta_T$, 在 $L^2(\mathbf{R})$ 上.

在 $[t_n, t + t_n]$ 上积分(19)式得:

$$|\lambda(t + t_n) - \lambda(t_n)| + |x(t + t_n) - x(t_n)| \leq C_1 \|\epsilon_0\|_{H^1}^2 T + C_2, \quad (26)$$

其中: $[t_n, t + t_n] \subset [0, T)$.

进一步, 令

$$\bar{\eta}_n(t, x) = \eta_n(t, x - x(t + t_n) + x(t_n)). \quad (27)$$

记

$$\bar{g}_1(\bar{t}) = \lambda^{-1/2}(\bar{t}) \cdot \frac{\lambda_t}{\lambda(\bar{t})} \left[\frac{Q(\bar{x})}{2} + \bar{x} Q_x(\bar{x}) \right], \quad (28)$$

$$\bar{g}_2(\bar{t}) = \lambda^{1/2}(\bar{t}) \cdot \frac{x_t}{\lambda(\bar{t})} \cdot Q_x(\hat{x}) + \frac{1}{2} \lambda^{-1}(\bar{t}) e^{-|x|} * (2\Phi_x \Phi_{xx} + \Phi \Phi_{xxx} - 3\Phi \Phi_x), \quad (29)$$

其中: 记 $\hat{x} = \lambda^{-1}(\bar{t})\bar{x}$, $\bar{t} = t + t_n$, $\bar{x} = x - x(t + t_n) + x(t_n)$ 和 $\Phi = Q(\hat{x}) + \lambda^{1/2}(\bar{t})\bar{\eta}_n$.

从而, $\bar{\eta}_n$ 满足:

$$(\bar{\eta}_n)_t = \bar{g}_1(\bar{t}) + \bar{g}_2(\bar{t}). \quad (30)$$

对 $\bar{g}_1(\bar{t})$, $\bar{g}_2(\bar{t})$ 进行估计.

由假设(H)、(19)和(26)式可知:

$$|\bar{g}_1(\bar{t})| \leq Ca_2 e^{-|\lambda^{-1}(\bar{t})x|} \leq Ca_2 e^{-\lambda_2^{-1}|x|}. \quad (31)$$

为了更好地估计 $\bar{g}_2(\bar{t})$, 下面将 $\bar{g}_2(\bar{t})$ 分为 3 个部分:

$$\bar{g}_2(\bar{t}) = \bar{g}_{21}(\bar{t}) + \bar{g}_{22}(\bar{t}) + \bar{g}_{23}(\bar{t}), \quad (32)$$

其中:

$$\bar{g}_{21}(\bar{t}) = \lambda^{1/2}(\bar{t}) \cdot \frac{x_t}{\lambda(\bar{t})} \cdot Q_x(\hat{x}), \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \bar{g}_{22}(\bar{t}) = & \frac{1}{2} \lambda^{-1}(\bar{t}) e^{-|x|} * \{2[Q_x(\hat{x})Q_{xx}(\hat{x}) + \lambda^{1/2}(\bar{t})Q_x(\hat{x})(\bar{\eta}_n)_{xx} + \lambda^{1/2}(\bar{t})Q_{xx}(\hat{x})(\bar{\eta}_n)_x] + \\ & [Q(\hat{x})Q_{xxx}(\hat{x}) + \lambda^{1/2}(\bar{t})Q(\hat{x})(\bar{\eta}_n)_{xxx} + \lambda^{1/2}(\bar{t})Q_{xxx}(\hat{x})\bar{\eta}_n] - \\ & 3[Q(\hat{x})Q_x(\hat{x}) + \lambda^{1/2}(\bar{t})Q(\hat{x})(\bar{\eta}_n)_x + \lambda^{1/2}(\bar{t})Q_x(\hat{x})\bar{\eta}_n]\}, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\bar{g}_{23}(\bar{t}) = \frac{1}{2} e^{-|x|} * [2(\bar{\eta}_n)_x(\bar{\eta}_n)_{xx} + \bar{\eta}_n(\bar{\eta}_n)_{xxx} - 3\bar{\eta}_n(\bar{\eta}_n)_x]. \quad (35)$$

同样由假设(H)、(19)和(26)式可知:

$$|\bar{g}_{21}(\bar{t})| \leq Ca_2 e^{-|\lambda^{-1}(\bar{t})x|} \leq Ca_2 e^{-\lambda_2^{-1}|x|}. \quad (36)$$

为了估计 $\bar{g}_{22}(\bar{t})$ 和 $\bar{g}_{23}(\bar{t})$, 需要估计 $\|\bar{\eta}_n\|_{H^2}$.

引理 4 若 $\bar{\eta}_n(t)$ 由(27)式给出且 $\|u_0 - Q\|_{H^2} \leq \tau_2$, 则 $\|\bar{\eta}_n\|_{H^2}^2 \leq C_1 \|\epsilon_0\|_{H^2}^2 + C_2, t \in [0, T]$.

证明 由(21)、(23)和(27)式知: $\bar{\eta}_n(t, x) = \lambda^{-1/2}(\bar{t})\epsilon(\bar{t}, \lambda^{-1}(\bar{t})\bar{x})$. 因为

$$\|\bar{\eta}_n\|_{H^2}^2 \leq \int [\lambda^{-1}(\bar{t})\epsilon^2 + \lambda(\bar{t})\epsilon_x^2 + \lambda^3(\bar{t})\epsilon_{xx}^2] \leq \lambda_2^4 \|\epsilon\|_{H^2}^2 \leq C_1 \|\epsilon_0\|_{H^2}^2 + C_2,$$

所以 $\|\bar{\eta}_n\|_{H^2}$ 一致有界.

引理 5 ($\bar{g}_{22}$ 和 $\bar{g}_{23}$ 的指数衰减) 若 $\bar{g}_{22}$ 和 $\bar{g}_{23}$ 分别由(34)、(35)式给出, 则存在常数 C 和 $\delta_1, \delta_2 > 0$,

对 $\bar{t} \in [0, T], \forall x \in \mathbf{R}$, 有 $|\bar{g}_{22}(\bar{t})| \leq C(a_2 + a_3)(e^{-\delta_1|x|} + e^{-\delta_2|x|}), |\bar{g}_{23}(\bar{t})| \leq Ca_2 a_3(e^{-\delta_1|x|} + e^{-\delta_2|x|})$. 进一步,

$$|\bar{g}_{22}(\bar{t})| \leq C(a_2 + a_3)e^{-\delta|x|}, \quad (37)$$

$$|\bar{g}_{23}(\bar{t})| \leq Ca_2 a_3 e^{-\delta|x|}, \quad (38)$$

其中: $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

证明

$$\begin{aligned} \bar{g}_{22}(\bar{t}) = & \frac{1}{2} \lambda^{-1}(\bar{t}) e^{-|x|} * \{[2Q_x(\hat{x})Q_{xx}(\hat{x}) + \lambda^{1/2}(\bar{t})Q_x(\hat{x})(\bar{\eta}_n)_{xx} + 2\lambda^{1/2}(\bar{t})Q_{xx}(\hat{x})(\bar{\eta}_n)_x] + \\ & [Q(\hat{x})Q_{xxx}(\hat{x}) + \lambda^{1/2}(\bar{t})Q_{xxx}(\hat{x})\bar{\eta}_n] - 3[Q(\hat{x})Q_x(\hat{x}) + \lambda^{1/2}(\bar{t})Q(\hat{x})(\bar{\eta}_n)_x + \\ & \lambda^{1/2}(\bar{t})Q_x(\hat{x})\bar{\eta}_n]\} - \frac{1}{2} \lambda^{-1}(\bar{t}) \int (e^{-|x-\xi|})_\xi \cdot \lambda^{1/2}(\bar{t})Q(\hat{x})(\bar{\eta}_n)_{\xi\xi}, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} |\bar{g}_{22}(\bar{t})| \leq & \frac{1}{2} \lambda^{-1}(\bar{t}) e^{-|x|} * \{[2Q_x(\hat{x})Q_{xx}(\hat{x}) + \lambda^{1/2}(\bar{t})Q_x(\hat{x})(\bar{\eta}_n)_{xx} + 2\lambda^{1/2}(\bar{t})Q_{xx}(\hat{x})(\bar{\eta}_n)_x] + \\ & [Q(\hat{x})Q_{xxx}(\hat{x}) + \lambda^{1/2}(\bar{t})Q_{xxx}(\hat{x})\bar{\eta}_n] - 3[Q(\hat{x})Q_x(\hat{x}) + \lambda^{1/2}(\bar{t})Q(\hat{x})(\bar{\eta}_n)_x + \\ & \lambda^{1/2}(\bar{t})Q_x(\hat{x})\bar{\eta}_n]\} + |\lambda^{1/2}(\bar{t})Q(\hat{x})(\bar{\eta}_n)_{xx}|. \end{aligned}$$

不妨记

$$A(\xi) = \{ | [2Q_x(\tilde{x})Q_{xx}(\tilde{x}) + \lambda^{1/2}(\bar{t})Q_x(\tilde{x})(\bar{\eta}_n)_{xx} + 2\lambda^{1/2}(\bar{t})Q_{xx}(\tilde{x})(\bar{\eta}_n)_x] + \\ [Q(\tilde{x})Q_{xxx}(\tilde{x}) + \lambda^{1/2}(\bar{t})Q_{xxx}(\tilde{x})\bar{\eta}_n] - 3[Q(\tilde{x})Q_x(\tilde{x}) + \lambda^{1/2}(\bar{t})Q(\tilde{x})(\bar{\eta}_n)_x + \\ \lambda^{1/2}(\bar{t})Q_x(\tilde{x})\bar{\eta}_n] | + | \lambda^{1/2}(\bar{t})Q(\tilde{x})(\bar{\eta}_n)_{xx} | \},$$

从而,

$$| \bar{g}_{22}(\bar{t}) | \leq \frac{1}{2}\lambda^{-1}(\bar{t}) \int_{|x| \leq |\xi|} e^{-|x-\xi|} \cdot A(\xi) + \frac{1}{2}\lambda^{-1}(\bar{t}) \int_{|x| > |\xi|} e^{-|x-\xi|} \cdot A(\xi). \quad (39)$$

对于(39)式右端的两个积分式,有如下的讨论:

情形 1 当 $|x| \leq |\xi|$ 时,那么,存在一个常数 $\delta_1 > 0$,使得 $|\xi| = (1 + \delta_1)|x|$,即: $\xi = (1 + \delta_1)x$ 或者 $\xi = -(1 + \delta_1)x$.

$$1) \text{ 若 } \xi = (1 + \delta_1)x, \text{ 则 } \int_{|x| \leq |\xi|} e^{-|x-\xi|} \cdot A(\xi) = \int_{|x| \leq |\xi|} e^{-|x-(1+\delta_1)x|} \cdot A(\xi) = e^{-\delta_1|x|} \int_{|x| \leq |\xi|} A(\xi); \\ 2) \text{ 若 } \xi = -(1 + \delta_1)x, \text{ 则 } \int_{|x| \leq |\xi|} e^{-|x-\xi|} \cdot A(\xi) = \int_{|x| \leq |\xi|} e^{-|x+(1+\delta_1)x|} \cdot A(\xi) = e^{-(2+\delta_1)|x|} \int_{|x| \leq |\xi|} A(\xi).$$

从而:

$$\int_{|x| \leq |\xi|} e^{-|x-\xi|} \cdot A(\xi) \leq e^{-\delta_1|x|} \int_{|x| \leq |\xi|} A(\xi). \quad (40)$$

情形 2 当 $|x| > |\xi|$ 时,那么,存在一个常数 $\delta_2 > 0$,使得 $|\xi| = (1 - \delta_2)|x|$.由三角不等式可知:

$$\int_{|x| > |\xi|} e^{-|x-\xi|} \cdot A(\xi) \leq \int_{|x| > |\xi|} e^{|\xi|-|x|} \cdot A(\xi) = e^{-\delta_2|x|} \int_{|x| > |\xi|} A(\xi). \quad (41)$$

因此,综合(39)、(40)、(41)及假设(H)可得:

$$| \bar{g}_{22}(\bar{t}) | \leq C e^{-\delta_1|x|} \int_{|x| \leq |\xi|} A(\xi) + C e^{-\delta_2|x|} \int_{|x| > |\xi|} A(\xi) \leq C(e^{-\delta_1|x|} + e^{-\delta_2|x|}) \int A(\xi) \leq C(5 \|\bar{\eta}_n\|_{H^1} + \\ 2 \|\bar{\eta}_n\|_{H^2} + 4 \|\bar{\eta}_n\|_{L^2})(e^{-\delta_1|x|} + e^{-\delta_2|x|}) \leq C(a_2 + a_3)(e^{-\delta_1|x|} + e^{-\delta_2|x|}).$$

接下来,估计 $\bar{g}_{23}(\bar{t})$.由于 $| \bar{g}_{23}(\bar{t}) | \leq \frac{1}{2}e^{-|x|} * [| (\bar{\eta}_n)_x(\bar{\eta}_n)_{xx} - 3\bar{\eta}_n(\bar{\eta}_n)_x | + | \bar{\eta}_n(\bar{\eta}_n)_{xx} |]$.不妨记

$$B(\xi) = | (\bar{\eta}_n)_x(\bar{\eta}_n)_{xx} - 3\bar{\eta}_n(\bar{\eta}_n)_x | + | \bar{\eta}_n(\bar{\eta}_n)_{xx} |, \text{ 故 } | \bar{g}_{23}(\bar{t}) | \leq \frac{1}{2} \int_{|x| \leq |\xi|} e^{-|x-\xi|} \cdot B(\xi) + \frac{1}{2} \int_{|x| > |\xi|} e^{-|x-\xi|} \cdot B(\xi).$$

$$\text{同理可得: } | \bar{g}_{23}(\bar{t}) | \leq C e^{-\delta_1|x|} \int_{|x| \leq |\xi|} B(\xi) + C e^{-\delta_2|x|} \int_{|x| > |\xi|} B(\xi) \leq C(e^{-\delta_1|x|} + e^{-\delta_2|x|}) \int B(\xi) \leq \\ C(\|\bar{\eta}_n\|_{H^1} \|\bar{\eta}_n\|_{H^2} + 3 \|\bar{\eta}_n\|_{L^2} \|\bar{\eta}_n\|_{H^1} + \|\bar{\eta}_n\|_{L^2} \|\bar{\eta}_n\|_{H^2})(e^{-\delta_1|x|} + e^{-\delta_2|x|}) \leq C a_2 a_3 (e^{-\delta_1|x|} + e^{-\delta_2|x|}).$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$,不难得到(37)和(38)式.

不妨令 $\theta_1 = \min\{\delta, \lambda_2^{-1}\}$,由(31)、(36)和引理 5 知:

$$| \bar{g}_1(\bar{t}) | \leq C a_2 e^{-\theta_1|x|}, \quad (42)$$

$$| \bar{g}_{21}(\bar{t}) | \leq C a_2 e^{-\theta_1|x|}, | \bar{g}_{22}(\bar{t}) | \leq C(a_2 + a_3) e^{-\theta_1|x|}, | \bar{g}_{23}(\bar{t}) | \leq C a_2 a_3 e^{-\theta_1|x|}. \quad (43)$$

引理 6 ($\bar{g}_1 + \bar{g}_2$ 的指数衰减) 若 $\bar{g}_1 + \bar{g}_2$ 由(28)和(29)式给出,则对 $\bar{t} \in [0, T)$, $\forall x \in \mathbf{R}$,有 $| \bar{g}_1(\bar{t}) + \bar{g}_2(\bar{t}) | \leq C a_3 e^{-\theta_1|x|}$,其中 C 为常数和 $\theta_1 > 0$.

证明 由(32)、(42)和(43)式可得

$$| \bar{g}_1(\bar{t}) + \bar{g}_2(\bar{t}) | \leq | \bar{g}_1(\bar{t}) | + | \bar{g}_2(\bar{t}) | \leq | \bar{g}_1(\bar{t}) | + | \bar{g}_{21}(\bar{t}) | + | \bar{g}_{22}(\bar{t}) | + | \bar{g}_{23}(\bar{t}) | \leq C a_3 e^{-\theta_1|x|}.$$

引理 7 若 $\bar{\eta}_n$ 由(30)式给出,则对 $t \in [0, T)$, $\forall x \in \mathbf{R}$,有 $| \bar{\eta}_n(t) | \leq C a_3 T e^{-\theta_1|x|} + | \bar{\eta}_n(0) |$,其中 C 为常数和 $\theta_1 > 0$.

证明 由(30)式和引理 6 可知:

$$| (\bar{\eta}_n)_t | \leq | \bar{g}_1(\bar{t}) + \bar{g}_2(\bar{t}) | \leq C a_3 e^{-\theta_1|x|}. \quad (44)$$

对不等式(44),在区间 $[0, t](t < T)$ 上关于时间变量积分得:

$$|\bar{\eta}_n(t)| \leq Ca_3 T e^{-\theta_1 |x|} + |\bar{\eta}_n(0)|. \quad (45)$$

定理 1 假设 $u(t)$ 为 Cauchy 问题(2)满足 $u_0 \in H^2(\mathbf{R})$ 的解且(H)成立, $\epsilon(t)$ 由(15)式给出.那么,存在常数 $\theta > 0$ 使得 $|\epsilon(t, y)| \leq Ca_3 T e^{-\theta |y|} + |\lambda^{1/2}(t)\epsilon_0|$, 对 $t \in [0, T), \forall y \in \mathbf{R}$.

证明 由(21)、(23)和(27)式知:

$$\bar{\eta}_n(t, x) = \lambda^{-1/2}(t)\epsilon(t, \lambda^{-1/2}(t)(x - x(t))), n \rightarrow +\infty. \quad (46)$$

所以,通过(45)和(46)式可知: $|\epsilon(t, y)| \leq Ca_3 T e^{-\theta |y|} + |\lambda^{1/2}(t)\epsilon_0|$, 其中 $\theta = \lambda_1 \theta_1$, 定理 1 得证.

致谢: 非常感谢匿名审稿人仔细阅读原稿并提出改进文稿的建议性意见.

参 考 文 献

- [1] Fokas A, Fuchssteiner B. Symplectic structures, their Bäcklund transformation and hereditary Symmetries[J]. Phys D, 1981, 4: 47-66.
- [2] Lenells J. Conservation laws of the Camassa-Holm equation[J]. J Phys A, 2005, 38: 869-880.
- [3] Camassa R, Holm D. An integrable shallow water equation with peaked solitons[J]. Phys Rev Lett, 1993, 71: 1661-1664.
- [4] Constantin A. On the scattering problem for the Camassa-Holm equation[J]. Proc R Soc Lond, 2001, 457: 953-970.
- [5] Lenells J. Traveling wave solutions of the Camassa-Holm equation[J]. J Differential Equations, 2005, 217: 393-430.
- [6] Li Y, Olver P. Well-posedness and blow-up solutions for an integrable nonlinearly dispersive model wave equation[J]. J Differential Equations, 2000, 162: 27-63.
- [7] Constantin A, Strauss W. Stability of the Camassa-Holm solitons[J]. J Nonlinear Sci, 2002, 12: 415-422.
- [8] Constantin A, Strauss W. Stability of peakons[J]. Comm Pure Appl Math, 2000, 53: 603-610.
- [9] Johnson R S. On solutions of the Camassa-Holm equation[J]. Proc Roy Soc London A, 2003, 459: 1687-1708.
- [10] Constantin A. Existence of permanent and breaking waves for a shallow water equation: a geometric approach[J]. Ann Inst Fourier (Grenoble), 2000, 50: 321-362.
- [11] Constantin A, Escher J. Wave breaking for nonlinear nonlocal shallow water equations[J]. Acta Math, 1998, 181: 229-243.
- [12] Constantin A, Escher J. On the blow-up rate and the blow-up set of breaking waves for a shallow water equation[J]. Math Z, 2000, 233: 75-91.
- [13] Martel Y, Merle F, Raphaël P. Blow up for the critical gKdV equation I: dynamics near the soliton[J]. Acta Math, 2014, 212: 59-140.
- [14] Martel Y, Merle F. A Liouville theorem for the critical generalized Korteweg-de Vries Equation[J]. J Math Pures Appl, 2000, 79: 339-425.
- [15] Martel Y, Merle F. Instability of solitons for the critical generalized Korteweg-de Vries equation[J]. Geom Funct Anal, 2001, 11: 74-123.

Solutions of the Camassa-Holm equation near the soliton

Ding Danping, Lu Wei

(Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

Abstract: In this paper, solutions of the Camassa-Holm equation near the soliton is decomposed by pseudo-conformal transformation as follow: $\lambda^{1/2}(t)u(t, \lambda(t)y + x(t)) = Q(y) + \epsilon(t, y)$, and the residuals ϵ is estimated: $|\epsilon(t, y)| \leq Ca_3 T e^{-\theta |y|} + |\lambda^{1/2}(t)\epsilon_0|$. We prove that the solution of the Cauchy problem and the soliton Q is sufficiently close as $y \rightarrow \infty$, and the approximation degree of the solution and Q is the same as that of initial data and Q if initial value and the soliton are close enough, besides the energy distribution of ϵ is consistent with the distribution of the soliton Q in H^2 .

Keywords: Camassa-Holm equation; pseudo-conformal transformation; the decomposition of solution; soliton

[责任编辑 陈留院]