

# Rosenau 方程的显式行波解及动力学行为

林府标, 杨欣霞, 张千宏

(贵州财经大学 数统与统计学院, 贵阳 550025)

**摘要:** 找到 Rosenau 方程的显式精确解十分困难, 研究方法常采用数值离散求解技术. 首先, 采用李群分析法给出了 Rosenau 方程的对称群、约化常微分方程和群不变解; 其次, 构造了一种精确求解非线性偏微分方程的  $\exp(-\varphi(\xi))$  展式法, 利用此方法找到了 Rosenau 方程的显式行波解, 分析了解的动力学行为; 最后, 所获得的显式行波解既证明了 Rosenau 方程显式精确解的存在性, 又可用于验证数值解的精度、检验数值离散方案的优劣, 为工程领域的实际应用提供理论依据和参考.

**关键词:** Rosenau 方程; 显式行波解; 动力学行为

**中图分类号:** O175.4; O175.29

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1000-2367(2024)02-0033-08

在探究离散系统稠密性的动态性时, 为了克服 KdV 方程不能准确预测坡度和高振幅波性态的缺点, ROSENAU<sup>[1-2]</sup> 提出了五阶非线性偏微分 Rosenau 方程

$$Lu = u_t + u_{xxxxt} + u_x + u^p u_x = 0, \quad (1)$$

其中,  $t$  表示时间,  $x$  代表平衡水平面上沿波传播方向上的坐标,  $p$  为非零常数. 当  $p = 1$  时, 方程(1)称为 Rosenau 方程, 当  $p \neq 1$  时, 方程(1)称为广义 Rosenau 方程. 为了进一步考虑动力学系统中非线性波及耗散现象, PARK<sup>[3]</sup> 讨论了含黏性项  $-u_{xx}$  的 Rosenau-Burgers 方程

$$u_t + u_{xxxxt} - \mu u_{xx} + u_x + uu_x = 0 \quad (2)$$

的解的存在性和唯一性, 其中,  $\mu$  代表非负黏性系数. 方程(1)和(2)在研究紧离散动力学系统、模拟无线电及计算机领域、波与波相撞、波与障碍物或墙相互作用等方面具有重要应用. 但鉴于方程(1)和(2)精确解的缺乏, 初值和边值问题解的存在唯一性、柯西问题的适定性、算法的收敛性和稳定性、误差估计、解的渐近性、永久性、动力学行为性质等常借助于数值离散及实验技术进行研究<sup>[4-13]</sup>.

虽然历经多年的研究和探索, 构造非线性偏微分方程的精确解, 已找到了许多方法与技巧<sup>[14]</sup>, 如李群分析法<sup>[15]</sup>, Tanh 函数法和广义 Tanh 函数法<sup>[14]</sup>, 齐次平衡法<sup>[14,16]</sup>等. 但鉴于诸多新方程不断从各个学科领域中涌现, 在非线性和工程技术领域, 至今仍然存在众多的方程很难找到精确解<sup>[14]</sup>. 就现有文献<sup>[1-13]</sup>来看, 寻求方程(1)和(2)的精确解及方法, 仍是一个亟待探索和解决的问题.

论文拟不仅对方程(1)和(2)作经典李群分析, 而且构造一种精确求解非线性偏微分方程的  $\exp(-\varphi(\xi))$  展式法. 针对方程(1)的结构和特征及性质, 利用此方法探索方程(1)的显式行波解及孤立波解. 对找到的行波解, 分析解的相关动力学行为及性质. 希望所获得的解可用于验证数值解的正确性和精度, 以及检验数

**收稿日期:** 2022-11-22; **修回日期:** 2022-12-30.

**基金项目:** 国家自然科学基金(11761018); 贵州省科技计划基金项目(黔科合基础-ZK[2022]一般 021); 黔科合平台人才-GCC[2022]020-1; 贵州省高等学校系统建模与数据挖掘重点实验室课题(2023013).

**作者简介(通信作者):** 林府标(1978-), 男, 贵州盘州人, 贵州财经大学副教授, 博士, 研究方向为非线性偏微分方程, E-mail: linfubiao0851@163.com.

**引用本文:** 林府标, 杨欣霞, 张千宏. Rosenau 方程的显式行波解及动力学行为[J]. 河南师范大学学报(自然科学版), 2024, 52(2): 33-40. (Lin Fubiao, Yang Xinxia, Zhang Qianhong. Explicit travelling wave solutions and dynamic behaviors of the Rosenau equation[J]. Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition), 2024, 52(2): 33-40. DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2022.11.22.0002.)

值离散方案的优劣,也为精确描述、解释、模拟及应用许多自然科学现象提供理论依据和策略.

## 1 李群分析法

### 1.1 方程(1)和(2)的对称群

虽然经典李群分析法<sup>[15]</sup>在理论上是研究微分方程的对称群、群不变解及精确解的行之有效工具之一,但随着方程阶数的递增和非线性项的影响,巨大的计算量既烦琐又难以避免.依据经典李群算法框架,方程

(1)和(2)的对称群的生成元可假设为  $X = \xi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial x} + \tau(x, t, u) \frac{\partial}{\partial t} + \eta(x, t, u) \frac{\partial}{\partial u}$ ,  $X_{(5)} = X + \eta^x \frac{\partial}{\partial u_x} +$

$\eta^t \frac{\partial}{\partial u_t} + \eta^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \eta^{xxx} \frac{\partial}{\partial u_{xxx}} + \eta^{xxxx} \frac{\partial}{\partial u_{xxxx}} + \eta^{xxxxt} \frac{\partial}{\partial u_{xxxxt}}$ , 其中  $X_{(5)}$  是  $X$  的五阶延拓算子,系数函数  $\eta^x$ ,

$\eta^t, \eta^{xx}, \eta^{xxx}, \eta^{xxxx}, \eta^{xxxxt}$  的计算分别为

$$\eta^x = D_x(\eta) - u_x D_x(\xi) - u_t D_x(\tau), \eta^t = D_t(\eta) - u_x D_t(\xi) - u_t D_t(\tau),$$

$$\eta^{xx} = D_x(\eta^x) - u_{xx} D_x(\xi) - u_{xt} D_x(\tau), \eta^{xxx} = D_x(\eta^{xx}) - u_{xxx} D_x(\xi) - u_{xxt} D_x(\tau),$$

$$\eta^{xxxx} = D_x(\eta^{xxx}) - u_{xxxx} D_x(\xi) - u_{xxx t} D_x(\tau), \eta^{xxxxt} = D_t(\eta^{xxxx}) - u_{xxxx t} D_t(\xi) - u_{xxxx t} D_t(\tau),$$

其中  $D_x$  和  $D_t$  分别表示关于  $x$  和  $t$  的全微分算子. 方程(1)的决定方程为

$$X_{(5)}(Lu) \big|_{(1)} = (\eta^t + \eta^{xxxxt} + \eta^x + pu^{p-1}u_x\eta + u^p\eta^x) \big|_{(1)} = 0, \quad (3)$$

其中,左下角标  $\big|_{(1)}$  表示方程(3)对方程(1)的任一解皆恒成立.将  $u_t = -(u_{xxxxt} + u_x + u^p u_x)$  代入方程(3),

于是其左端可表示为  $u, u_x, u_{xx}, u_{xt}, u_{xxx}, \dots, u_{xxxxt}, u_{xxxxt}$  的多项式.为了行文简洁,省略其烦琐和巨大量的符号计算及过程.令多项式的各项系数为零,可得关于系数函数  $\xi, \tau, \eta$  的超决定方程组

$$\xi_u = 0, \xi_t = 0, \tau_u = 0, \tau_x = 0, \eta_{uu} = 0, \eta_{tu} = 0, 4\eta_{uxx} - \xi_{xxx} = 0, 3\eta_{uxx} - 2\xi_{xxx} = 0,$$

$$2\eta_{ux} - 3\xi_{xx} = 0, \eta_{uxxx} + 4\xi_x = 0, \eta_{txxxx} + \eta_t + (u^p + 1)\eta_x = 0,$$

$$pu^p\eta + (u^p + 1)u\tau_t - (u^p + 1)u\eta_{uxxxx} - (u^p + 1)u\xi_x = 0.$$

若  $p \neq 1$ ,则解之超决定方程组,得其解为  $\xi = c_1, \tau = c_2, \eta = 0$ .若  $p = 1$ ,超决定方程组的解为

$$\xi = c_1, \eta = (u + 1)c_2, \tau = -c_2t + c_3.$$

其中,  $c_1, c_2, c_3$  为任意常数.采用类似的方法,可讨论方程(2)的决定方程的通解,因此获得下述相关结论.

**定理 1** 若  $p \neq 1$ ,方程(1)的对称群的全体生成元,构成一个二维李代数  $L_2 = \text{span}\{Y_1, Y_2\}$ ,并有下列

一组基  $Y_1 = \frac{\partial}{\partial x}, Y_2 = \frac{\partial}{\partial t}$ .若  $p = 1$ ,方程(1)的对称群的全体生成元,构成一个三维李代数  $L_3 = \text{span}\{X_1, X_2,$

$X_3\}$ ,并有下列一组基  $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = \frac{\partial}{\partial t}, X_3 = (u + 1) \frac{\partial}{\partial u} - t \frac{\partial}{\partial t}$ .

**定理 2** 方程(2)的对称群的全体生成元,构成一个二维李代数  $\tilde{L}_2 = \text{span}\{Z_1, Z_2\}$ ,并有下列一组基

$$Z_1 = \frac{\partial}{\partial x}, Z_2 = \frac{\partial}{\partial t}.$$

### 1.2 李代数 $L_3$ 的子李代数分类

当  $p = 1$  时,研究方程(1)的群不变解、约化方程及精确解,探寻满足实际意义的真实精确解,需要构造李代数  $L_3$  的换位子运算表、最优化子李代数分类系统.李代数  $L_3$  的交换位子运算结果列于表 1.

采用李代数  $L_3$  的交换位子运算表 1,可得相应的内自同构为  $A_1: x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}, A_2: -x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ , 其对应的变换

李群分别为:  $A_1: \bar{x}_1 = x_1, \bar{x}_2 = x_3 a_1 + x_2, \bar{x}_3 = x_3, A_2: \bar{x}_1 = x_1, \bar{x}_2 = x_2 \exp(-a_2), \bar{x}_3 = x_3$ , 其中,  $a_1, a_2$  分别是李群  $A_1, A_2$  对应的群参数.

**定理 3** 对任意常数  $c$ ,李代数  $L_3$  的一维、二维及三维最优化子李代数系统分类为  $\text{span}\{X_2 + cX_1\}, \text{span}\{X_3 + cX_1\}, \text{span}\{X_1\}, \text{span}\{X_1, X_3\}, \text{span}\{X_1, X_2\}, \text{span}\{X_3 + cX_1, X_2\}, \text{span}\{X_1, X_2, X_3\}$ .

### 1.3 方程(1)和(2)的群不变解

采用李代数  $L_3$  的一维最优化子李代数系统分类结果,探寻方程(1)的群不变解、精确解及约化方程.

情形  $\text{span}\{Y_2 + cY_1\}$ . 算子  $Y_2 + cY_1$  的不变量为  $J_1 = k(x - ct)$ ,  $J_2 = u$ ,  $k$  和  $c$  均为常数. 因此, 方程 (1) 的群不变解、行波解的表达式可写成  $u(x, t) = U(\xi)$ ,  $\xi = k(x - ct)$ , 其中,  $k$  和  $c$  分别表示波数和波速, 函数  $U$  满足方程

$$ck^4U^{(5)} + (c - 1)U' - U^pU' = 0, \tag{4}$$

情形  $\text{span}\{X_3 + cX_1\}$ . 算子  $X_3 + cX_1$  的不变量为  $J_1 = t^c \exp(x)$ ,  $J_2 = (u + 1)t$ . 因此, 借助于平移算子  $X_2$  的平移作用, 当  $p = 1$  时, 方程 (1) 的群不变解的表达式可写成  $u(x, t) = \frac{1}{t + \tau_0}U(\xi) - 1$ ,  $\xi = (t + \tau_0)^c \exp(x)$ , 其中,  $\tau_0$  为常数, 函数  $U$  满足方程

$$c\xi^5U^{(5)} + (10c - 1)\xi^4U^{(4)} + (25c - 6)\xi^3U^{(3)} + (15c - 7)\xi^2U'' + (2c - 1)\xi U' + \xi U U' - U = 0.$$

情形  $\text{span}\{Y_1\}$  和  $\text{span}\{Z_1\}$ . 算子  $Y_1$  和  $Z_1$  的不变量均为  $J_1 = t$ ,  $J_2 = u$ . 于是, 群不变解的表达式均可写成  $u(x, t) = \varphi(t)$ , 分别代入方程 (1) 和 (2) 得到  $\varphi' = 0$ . 因此, 其平凡解是  $u(x, t) = \alpha$ ,  $\alpha$  是常数.

情形  $\text{span}\{Z_2 + cZ_1\}$ . 算子  $Z_2 + cZ_1$  的不变量为  $J_1 = k(x - ct)$ ,  $J_2 = u$ ,  $k$  和  $c$  均为常数. 因此, 方程 (2) 的群不变解、行波解的表达式可写成  $u(x, t) = U(\xi)$ ,  $\xi = k(x - ct)$ , 其中,  $k$  和  $c$  分别表示波数和波速, 函数  $U$  满足方程  $ck^4U^{(5)} + k\mu U'' + (c - 1)U' - U U' = 0$ .

## 2 $\exp(-\varphi(\xi))$ 展式法

鉴于方程 (1) 精确解的缺乏, 诸多研究常采用数值离散技术<sup>[5-13]</sup>. 而现有的精确求解方法<sup>[14, 16]</sup>, 并非对每一个方程都是行之有效的, 文献 [1-13] 表明探索方程 (1) 的精确解是一个棘手的问题. 针对方程 (1) 的结构和特征, 构造  $\exp(-\varphi(\xi))$  展式法探究其精确解, 具体构造框架、算法核心思想及主要步骤阐释如下. 考虑非线性偏微分方程

$$H(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \dots) = 0, \tag{5}$$

其中  $u = u(x, t)$  是未知函数,  $H$  是关于  $u$  和  $u$  的所有偏导数的多项式, 并且涵盖  $u$  的最高阶偏导数项和非线性项.

第 1 步 作行波函数变换  $\xi = k(x - ct)$ , 其中  $k$  和  $c$  均为常数, 分别表示波数和波速. 假设  $u(x, t) = U(\xi)$  为方程 (5) 的解, 则方程 (5) 约化为方程

$$H(U, kU', -kcU', k^2U'', -k^2cU'', k^2c^2U'', \dots) = 0, \tag{6}$$

其中  $U' = \frac{dU}{d\xi}$ ,  $U'' = \frac{d^2U}{d\xi^2}$ ,  $\dots$ .

第 2 步 对于高阶方程, 若可能则事先对方程 (6) 两边同时关于变量  $\xi$  积分一次或多次, 再假设方程 (6) 的解的表达式为

$$U(\xi) = a_0 + a_1 \exp(-\varphi(\xi)) + \dots + a_n (\exp(-\varphi(\xi)))^n, \tag{7}$$

其中  $a_i$  ( $i = 0, \dots, n$ ) 均为待定常数, 正整数  $n$  可利用齐次平衡原理<sup>[14, 16]</sup> 的核心思想, 通过平衡方程 (6) 中的最高阶导数项与非线性项而得到. 函数  $\varphi = \varphi(\xi)$  满足方程

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = a^2 \exp(\varphi(\xi)) + b^2 \exp(-\varphi(\xi)) + 2ab, \tag{8}$$

其中  $a, b \in \mathbf{R}$ , 方程 (8) 的显式精确解为

$$\varphi(\xi) = \ln(b^2 \xi + \xi_0), a = 0; \varphi(\xi) = \ln\left(-\frac{b(a\xi + \xi_0) + 1}{a(a\xi + \xi_0)}\right), a \neq 0, \xi_0 \in \mathbf{R}. \tag{9}$$

第 3 步 将  $U = U(\xi)$  的表达式 (7) 代入方程 (6), 采用数学软件 REDUCE 计算整理得关于  $\exp(\varphi(\xi))$

的多项式.令  $\exp(j\varphi(\xi))(j=0,1,\dots)$  的所有系数为零,可获得关于待求参数  $a_i(i=0,\dots,n),a,b,c,k$  的代数方程组.

第 4 步 运用吴消元法<sup>[17]</sup>结合数学软件 REDUCE 计算,将求得的系数  $a_i(i=0,\dots,n),a,b,c,k$  代入方程(7),再结合  $\varphi=\varphi(\xi)$  满足方程(8)及其解式(9),即可获得方程(6)的显式行波解.

### 3 显式行波解

#### 3.1 当 $p=1$ 时,方程(1)的显式行波解

针对方程(1)的结构特征,采用  $\exp(-\varphi(\xi))$  展式法(8)及其精确解(9)探寻方程(1)的显式行波解.若取  $p=1$ ,则方程(4)变成  $(1-c)U' - ck^4U^{(5)} + UU' = 0$ ,然后对此方程两边关于  $\xi$  同时积分一次,记积分常数为  $c_0$ ,于是得到

$$2(1-c)U - 2ck^4U^{(4)} + U^2 + 2c_0 = 0. \quad (10)$$

由方程(10)中  $U^{(4)}$  与  $U^2$  两项,采用齐次平衡原理,可得到  $n=4$ ,再结合  $\exp(-\varphi(\xi))$  展式法(7)式,方程(10)的解的表达式可假设写成

$$U(\xi) = a_0 + a_1\exp(-\varphi(\xi)) + a_2(\exp(-\varphi(\xi)))^2 + a_3(\exp(-\varphi(\xi)))^3 + a_4(\exp(-\varphi(\xi)))^4, \quad (11)$$

其中,  $a_i(i=0,\dots,4)$  为待定常数,函数  $\varphi=\varphi(\xi)$  满足方程(8).将表达式(11)代入方程(10),反复利用式(8)结合数学软件 REDUCE 计算,可得关于  $\exp(j\varphi(\xi))(j=0,\dots,8)$  的系数为零,得到关于系数  $a_j(j=0,\dots,4),a,b,c,k,c_0$  的方程组

$$a_4(a_4 - 1680b^8ck^4) = 0, 5280aa_4b^7ck^4 - a_3a_4 + 360a_3b^8ck^4 = 0,$$

$$28320a^2a_4b^6ck^4 + 4320aa_3b^7ck^4 - 2a_2a_4 + 240a_2b^8ck^4 - a_3^2 = 0,$$

$$21024a^3a_4b^5ck^4 + 5472a^2a_3b^6ck^4 + 672aa_2b^7ck^4 - a_1a_4 + 24a_1b^8ck^4 - a_2a_3 = 0,$$

$$37440a^4a_4b^4ck^4 + 15120a^3a_3b^5ck^4 + 3120a^2a_2b^6ck^4 + 240aa_1b^7ck^4 - 2a_0a_4 - 2a_1a_3 - a_2^2 + 2a_4c - 2a_4 = 0,$$

$$10080a^5a_4b^3ck^4 + 6120a^4a_3b^4ck^4 + 1920a^3a_2b^5ck^4 + 240a^2a_1b^6ck^4 - a_0a_3 - a_1a_2 + a_3c - a_3 = 0,$$

$$6240a^6a_4b^2ck^4 + 5760a^5a_3b^3ck^4 + 2640a^4a_2b^4ck^4 + 480a^3a_1b^5ck^4 - 2a_0a_2 - a_1^2 + 2a_2c + 2a_2 = 0,$$

$$480a^7a_4bck^4 + 720a^6a_3b^2ck^4 + 480a^5a_2b^3ck^4 + 120a^4a_1b^4ck^4 - a_0a_1 + a_1c - a_1 = 0,$$

$$48a^8a_4ck^4 + 144a^7a_3bck^4 + 144a^6a_2b^2ck^4 + 48a^5a_1b^3ck^4 - a_0^2 + 2a_0c - 2a_0 - 2c_0 = 0.$$

采用吴消元法和数学软件 REDUCE 计算,解之得一组非零解为

$$c = 1 \pm \sqrt{2c_0}, a_0 = 1680a^4b^4ck^4 + c - 1, a_1 = 6720a^3b^5ck^4,$$

$$a_2 = 10080a^2b^6ck^4, a_3 = 6720ab^7ck^4, a_4 = 1680b^8ck^4. \quad (12)$$

因此,当  $p=1$  时,把系数(12)代入方程(11),利用  $\varphi=\varphi(\xi)$  满足方程(8)及其解的表达式(9),得到方程(1)的显式行波解分别为

$$u(x,t) = \frac{1680c}{(x-ct+\sigma)^4} + c - 1, c, \sigma \in \mathbf{R}. \quad (13)$$

$$u(x,t) = b^5ck^4(6720a^3g(\xi) + 10080a^2bg^2(\xi) + 6720ab^2g^3(\xi) + 1680b^3g^4(\xi)) +$$

$$1680a^4b^4ck^4 + c - 1, g(\xi) = -\frac{a(a\xi + \xi_0)}{b(a\xi + \xi_0) + 1}, \xi = k(x-ct), c = 1 \pm \sqrt{2c_0}. \quad (14)$$

当  $p=1$  时,解(13)和(14)进一步表明了文献[4]中方程(1)的解的存在性理论证明的正确性.

#### 3.2 当 $p=2$ 时,方程(1)的行波解

利用  $\exp(-\varphi(\xi))$  展式法(8)及其精确解(9),探究方程(4)的精确解.若选取  $p=2$ ,则方程(4)转化成  $k^4cU^{(5)} + (c-1)U' - U^2U' = 0$ ,对此方程两边同时关于变量  $\xi$  积分一次,并记  $c_1$  为积分常数,得到

$$3k^4cU^{(4)} + 3(c-1)U - U^3 + c_1 = 0. \quad (15)$$

采用齐次平衡原理,平衡方程(15)中  $U^{(4)}$  与  $U^3$  项得到  $n=2$ ,于是利用  $\exp(-\varphi(\xi))$  展式法(7),可假设方程(15)的解的表达式为

$$U(\xi) = b_0 + b_1\exp(-\varphi(\xi)) + b_2(\exp(-\varphi(\xi)))^2, \quad (16)$$

其中函数  $\varphi = \varphi(\xi)$  满足方程(8),参数  $b_i (i=0,1,2)$  为待定常数.将  $U=U(\xi)$  的表达式(16)代入方程(15).反复运用(8)式及数学软件 REDUCE 计算,得关于  $\exp(\varphi(\xi))$  的多项式,令  $\exp(j\varphi(\xi)) (j=0, \dots, 6)$  的系数为零,得关于系数  $b_0, b_1, b_2, a, b, c_1, c, k$  的方程组.采用吴消元法和数学软件 REDUCE 计算,获得一组非零解为

$$c=1, c_1=0, b_0=6\sqrt{10}a^2b^2k^2\varepsilon, b_1=12\sqrt{10}ab^3k^2\varepsilon, b_2=6\sqrt{10}b^4k^2\varepsilon, \varepsilon=\pm 1. \quad (17)$$

把解(17)代入表达式(16),利用函数  $\varphi = \varphi(\xi)$  满足方程(8)及解的表达式(9),则得到当  $p=2$  时方程(1)的显式行波解分别为

$$u(x, t) = \frac{6\sqrt{10}\varepsilon}{(x-t+\sigma)^2}, \sigma \in \mathbf{R}, \varepsilon = \pm 1. \quad (18)$$

$$u(x, t) = 6\sqrt{10}b^2k^2\varepsilon \left( a - \frac{ab(a\xi + \xi_0)}{b(a\xi + \xi_0) + 1} \right)^2, \xi = k(x-t), a, b, \xi_0 \in \mathbf{R}, \varepsilon = \pm 1. \quad (19)$$

文献[8-9]利用数值技术,讨论了广义 Rosenau 方程(1)的解的存在性等相关问题.当  $p=2$  时,解(18)和(19)从理论上证明了广义 Rosenau 方程的解的存在性.

### 3.3 当 $p=4$ 时,方程(1)的行波解

采用  $\exp(-\varphi(\xi))$  展式法(8),探寻方程(4)的精确解.若取  $p=4$ ,则方程(4)变成  $k^4cU^{(5)} + (c-1)U' - U^4U' = 0$ ,对此方程两边同时关于变量  $\xi$  积分一次,并记  $c_2$  为积分常数,得到

$$5k^4cU^{(4)} + 5(c-1)U - U^5 + c_2 = 0. \quad (20)$$

由方程(20)中  $U^{(4)}$  与  $U^5$  项,采用齐次平衡原理,可得到  $n=1$ .注意到  $\exp(-\varphi(\xi))$  展式法(7)式,于是假设方程(20)的解的表达式为

$$U(\xi) = d_0 + d_1 \exp(-\varphi(\xi)), \quad (21)$$

其中,  $d_i (i=0,1)$  为待定常数,函数  $\varphi = \varphi(\xi)$  满足方程(8).把  $U=U(\xi)$  的表达式(21)代入方程(20).反复利用(8)式及数学软件 REDUCE 计算,得到关于  $\exp(\varphi(\xi))$  的多项式,于是令  $\exp(j\varphi(\xi)) (j=0, \dots, 5)$  的系数为零,可得关于系数  $d_0, d_1, a, b, c, k, c_2$  的方程组.运用吴消元法和数学软件 REDUCE 计算,解得一组非零解为

$$c=1, c_2=0, d_0 = \sqrt[4]{120}abk\varepsilon, d_1 = \sqrt[4]{120}b^2k\varepsilon, \varepsilon = \pm 1. \quad (22)$$

将解(22)代入表达式(21),采用函数  $\varphi = \varphi(\xi)$  满足方程(8)及解的表达式(9),则可获得当  $p=4$  时方程(1)的显式行波解分别为

$$u(x, t) = \frac{\sqrt[4]{120}b^2k\varepsilon}{b^2k(x-t) + \xi_0}, \varepsilon = \pm 1. \quad (23)$$

$$u(x, t) = \frac{\sqrt[4]{120}abk\varepsilon}{b(a\xi + \xi_0) + 1}, \xi = k(x-t), \varepsilon = \pm 1. \quad (24)$$

文献[8-9]采用数值离散方案,探讨了广义 Rosenau 方程(1)的解的存在性等相关问题.当  $p=4$  时,解(23)和(24)从理论上表明了广义 Rosenau 方程(1)的解的存在性.

## 4 解的动力学行为

### 4.1 行波解(13)和(14)的动力学行为

方程(1)用于模拟和研究一些大型离散系统的流体动力学行为.文献[6-7]采用数值方法,探讨 Rosenau 方程的初值和边值问题解的存在性、唯一性、误差估计、渐近稳定性、收敛性及解的动力学行为等.当  $p=1$  时,采用  $\exp(-\varphi(\xi))$  展式法找到的方程(1)的解(13)和(14)具有永久存在性,即  $t \in (-\infty, +\infty)$ .解(13)和(14)均满足  $u(x, t) \rightarrow c-1$ , 当  $t \rightarrow \pm\infty$  或  $x \rightarrow \pm\infty$  时,表明解具有渐近稳定性;此外  $u_x(x, t) \rightarrow 0, u_{xx}(x, t) \rightarrow 0$ , 当  $x \rightarrow \pm\infty$ .当  $c=1$  时,解(13)和(14)具有孤立波解的特征和性质.解(13)对应的边界和初值条件分别为  $u(0, t) = \frac{1}{(\sigma - ct)^4} + c - 1, u(\infty, t) = c - 1, u(x, 0) = \frac{1}{(x + \sigma)^4} + c - 1, \sigma \in \mathbf{R}$ .解(14)对应

的边界和初值条件分别为  $u(0,t) = b^5 ck^4(6\ 720a^3 g(t) + 10\ 080a^2 bg^2(t) + 6\ 720ab^2 g^3(t) + 1\ 680b^3 g^4(t)) + 1\ 680a^4 b^4 ck^4 + c - 1$ ,  $g(t) = -\frac{a(\xi_0 - akt)}{b(\xi_0 - akt) + 1}$ ,  $u(\infty,t) = c - 1$ ,  $c = 1 \pm \sqrt{2c_0}$ ,  $u(x,0) = b^5 ck^4(6\ 720a^3 g(x) + 10\ 080a^2 bg^2(x) + 6\ 720ab^2 g^3(x) + 1\ 680b^3 g^4(x)) + 1\ 680a^4 b^4 ck^4 + c - 1$ ,  $g(x) = -\frac{a(akx + \xi_0)}{b(akx + \xi_0) + 1}$ ,  $c = 1 \pm \sqrt{2c_0}$ .

选取参数  $c=2, \sigma=2.5$  和  $c=1, k=1, a=2, b=2, \xi_0=2.5$ , 解(13)和(14)在矩形区域  $[0,10] \times [0,8]$  和  $[0,100] \times [0,100]$  上的图像分别见图 1 的(a)和(b), 表明解(13)和(14)是钟状型孤立波.

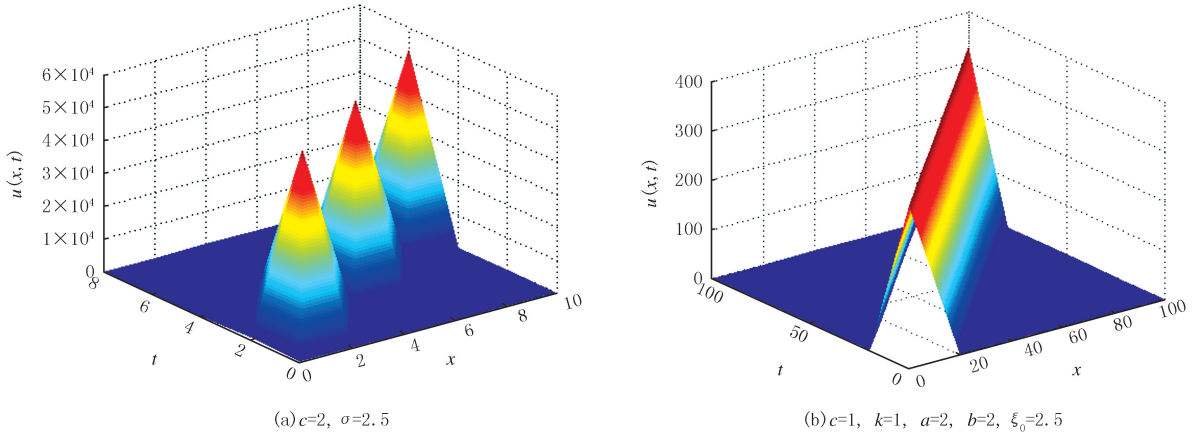


图1 显式行波解(13) (a)和(14) (b)的空间图像

Fig.1 The spatial images of explicit travelling wave solutions(13) (a) and (14) (b)

## 4.2 行波解(18)和(19)的动力学行为

文献[8-9]采用数值技术,讨论了广义 Rosenau 方程(1)初值和边值问题解的一系列相关性质及动力学行为等.当  $p=2$  时,运用  $\exp(-\varphi(\xi))$  展式法找到的解(18)和(19)具有永久存在性,即  $t \in (-\infty, +\infty)$ . 解(18)和(19)都满足条件  $u(x,t) \rightarrow 0$ , 当  $x \rightarrow \pm\infty$  或  $t \rightarrow \pm\infty$  时,表明解是渐近稳定的.当  $x \rightarrow \pm\infty$  时,有  $u_x(x,t) \rightarrow 0, u_{xx}(x,t) \rightarrow 0$ , 表明解(18)和(19)满足孤立波解的特征和性质.解(18)对应的边值和初值条件

$$\text{分别为 } u(0,t) = \frac{6\sqrt{10}\epsilon}{(t-\sigma)^2}, u(\infty,t) = 0, u(x,0) = \frac{6\sqrt{10}\epsilon}{(x+\sigma)^2}, \epsilon = \pm 1.$$

当  $p=2$  时,解(18)在矩形区域  $D=[0,L] \times [0,T]$  上对应的边界和初值条件分别为  $u(0,t) = \frac{6\sqrt{10}\epsilon}{(t-\sigma)^2}$ ,

$$u(L,t) = \frac{6\sqrt{10}\epsilon}{(t-\sigma-L)^2}, u_{xx}(0,t) = \frac{36\sqrt{10}\epsilon}{(t-\sigma)^4}, u_{xx}(L,t) = \frac{36\sqrt{10}\epsilon}{(t-\sigma-L)^4}, u(x,0) = \frac{6\sqrt{10}\epsilon}{(x+\sigma)^2}, \epsilon = \pm 1. \text{ 解(18)}$$

及其矩形区域  $D$  上对应的边界和初值条件,可用于验证数值解的精度、稳定性和数值离散方案的优劣等,如文献[9]中在缺乏精确解的条件下开展的数值模拟实验.

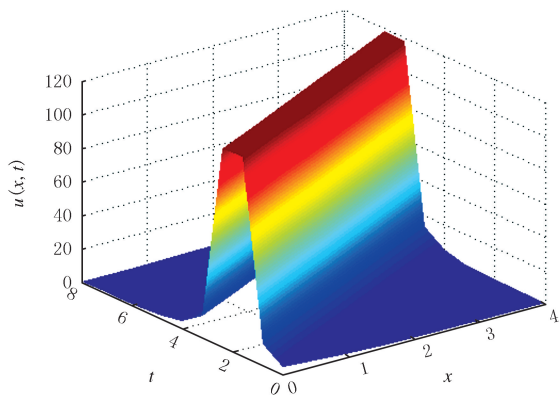
当  $p=2$  时,解(19)对应的边值和初值条件分别为  $u(0,t) = 6\sqrt{10}b^2k^2\epsilon(a - \frac{ab(\xi_0 - akt)}{b(\xi_0 - akt) + 1})^2, u(\infty, t) = 0, u(x,0) = 6\sqrt{10}b^2k^2\epsilon(a - \frac{ab(akx + \xi_0)}{b(akx + \xi_0) + 1})^2, \epsilon = \pm 1$ .

选取参数  $\sigma=2, \epsilon=1$  和  $k=2, a=1, b=2, \xi_0=-2.5, \epsilon=-1$ , 解(18)和(19)在矩形区域  $[0,4] \times [0,8]$  和  $[0,8] \times [0,4]$  上的图像分别见图 2 中的(a)和(b),表明解(18)和(19)分别是钟型和反钟型孤立波.图 2 中的(a)和(b)及解(18)和(19)的表达式,可得出解是具有形状不变的脉冲状的钟型或反钟型,依赖于  $\epsilon = \pm 1$  的选取.

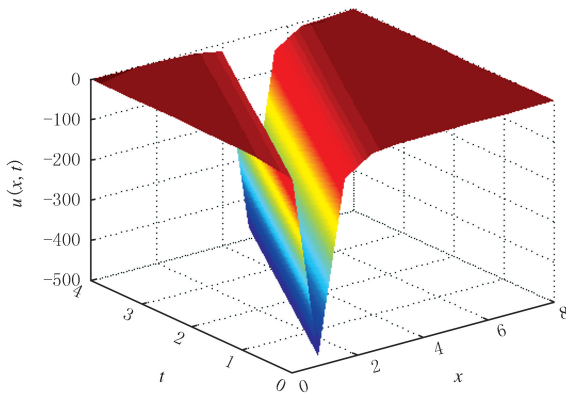
## 4.3 行波解(23)和(24)的动力学行为

文献[8-9]利用数值方法,分析了广义 Rosenau 方程(1)的解的存在性、误差估计、解的渐近稳定性及解的动力学行为性质等.当  $p=4$  时,利用  $\exp(-\varphi(\xi))$  展式法获得的解(23)和(24)均具有永久存在性,即

$t \in (-\infty, +\infty)$ .解(23)和(24)都满足  $u(x, t) \rightarrow 0$ ,当  $x \rightarrow \pm\infty$  或  $t \rightarrow \pm\infty$  时,表明解具有渐近稳定性.当  $x \rightarrow \pm\infty$  时,均有  $u_x(x, t) \rightarrow 0, u_{xx}(x, t) \rightarrow 0$ ,解(23)和(24)均具有孤立波的特征和性质.解(23)对应的边值和初值条件分别为  $u(0, t) = \frac{\sqrt[4]{120} b^2 k \epsilon}{\xi_0 - b^2 kt}, u(\infty, t) = 0, u(x, 0) = \frac{\sqrt[4]{120} b^2 k \epsilon}{b^2 kx + \xi_0}, \epsilon = \pm 1$ .



(a)  $c=1, \sigma=2, \epsilon=1$



(b)  $c=1, k=2, a=1, b=2, \xi_0=2.5, \epsilon=1$

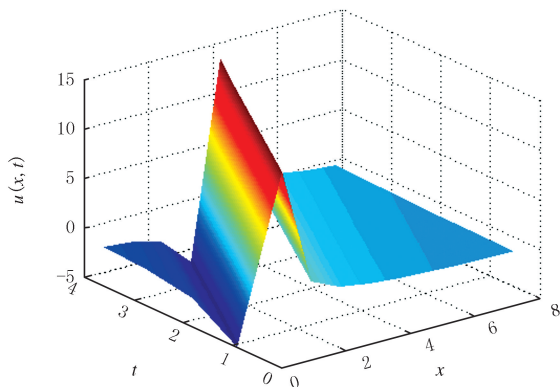
图2 显式行波解(18) (a)和(19) (b)的空间图像

Fig.2 The spatial images of explicit travelling wave solutions(18) (a) and (19) (b)

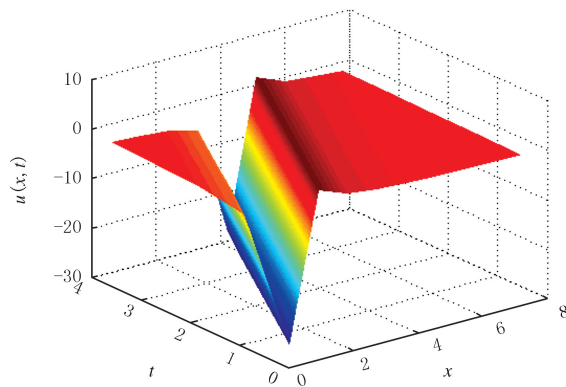
当  $p=4$  时,解(24)对应的边值和初值条件分别为

$$u(0, t) = \frac{\sqrt[4]{120} abk \epsilon}{b(\xi_0 - akt) + 1}, u(\infty, t) = 0, u(x, 0) = \frac{\sqrt[4]{120} abk \epsilon}{b(akx + \xi_0) + 1}, \epsilon = \pm 1.$$

选取参数  $k=1, a=1, b=3, \xi_0=2$  和  $k=30, a=1, b=20, \xi_0=-4$ ,解(23)和(24)在矩形区域  $[0, 8] \times [0, 4]$  上的图像分别见图 3 中的(a)和(b),其中  $\epsilon=1$ ,表明解(23)和(24)是钟型和扭结型交错状的孤立波.图 3 中的(a)和(b)结合解(23)和(24)的表达式,可得出解是钟型,还是反钟型、扭结型、反扭结型交错状的孤立波,取决于  $\epsilon = \pm 1$  的选取.



(a)  $c=1, k=1, a=1, b=3, \xi_0=2, \epsilon=1$



(b)  $c=1, k=30, a=1, b=20, \xi_0=4, \epsilon=1$

图3 显式行波解(23) (a)和(24) (b)的空间图像

Fig.3 The spatial images of explicit travelling wave solutions(23) (a) and (24) (b)

## 5 结束语

找到了方程(1)和(2)的对称群和群不变解.构造了一种精确求解非线性偏微分方程的  $\exp(-\varphi(\xi))$  展式法.采用该方法获得了方程(1)的行波解,文献[1-13]均未报道过这些解.找到的解表明了文献[4]中方程(1)的解的存在性理论证明的正确性,而且对进一步研究和寻找方程(1)的精确解,既有理论价值又有实际意义,也为数值解提供了理论依据和参考.构造的  $\exp(-\varphi(\xi))$  展式法可用于求解其他非线性偏微分方程,如

广义 Rosenau 方程  $u_t + \alpha u_x + \beta_{xxxx} + \gamma^p u_x = 0$ , 变系数的 Burgers 方程  $u_t + \alpha u_{xx} + \beta u_x = 0$  和 KdV 方程  $u_t + \alpha u_{xxx} + \beta u_x = 0$ , 其中  $\alpha, \beta, \gamma, p$  为常数. 如何构造行之有效的精确求解方法, 挖掘出方程(1)和(2)中蕴藏着的更多类型的精确解, 值得在今后的研究中进一步探索和创新.

### 参 考 文 献

- [1] ROSENAU P. A quasi-continuous description of a nonlinear transmission line[J]. *Physica Scripta*, 1986, 34: 827-829.
- [2] ROSENAU P. Dynamics of dense discrete systems high order effects[J]. *Progress of Theoretical Physics*, 1988, 79(5): 1028-1042.
- [3] PARK M A. On the Rosenau equation in multidimensional space[J]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 1993, 21(1): 77-85.
- [4] PARK M A. On the Rosenau equation[J]. *Computation and Applied Mathematics*, 1990, 9: 145-152.
- [5] ZHOU D Q, MU C L. Control and stabilization of the Rosenau equation posed on a periodic domain[J]. *Journal of Systems Science and Complexity*, 2018, 31(4): 889-906.
- [6] SHI D Y, JIA X. Nonconforming Quasi-Wilson finite element approximation for the nonlinear Rosenau equation[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2021, 119: 1-8.
- [7] ERBAY H A, ERBAY S, ERKIP A. Numerical computation of solitary wave solutions of the Rosenau equation[J]. *Wave Motion*, 2020, 98: 1-10.
- [8] 何挺, 胡兵, 徐友才. 广义 Rosenau 方程的有限元方法[J]. *四川大学学报(自然科学版)*, 2016, 53(1): 1-6.  
HE T, HU B, XU Y C. Finite element method for the generalized Rosenau equation[J]. *Journal of Sichuan University (Natural Science Edition)*, 2016, 53(1): 1-6.
- [9] WANG M, LI D S, CUI P A. A conservative finite difference scheme for the generalized Rosenau equation[J]. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2011, 71(4): 539-549.
- [10] HUSSAIN M, HAQ S. Numerical simulation of solitary waves of Rosenau-KdV equation by Crank-Nicolson meshless spectral interpolation method[J]. *The European Physical Journal Plus*, 2020, 135(98): 1-22.
- [11] 高启存, 阿不都热西提·阿布都外力. 非齐次 Rosenau-Burgers 方程的三种数值方法比较[J]. *数学的实践与认识*, 2021, 51(6): 246-256.  
GAO Q C, ABUDUREXITI A. Comparison on the three numerical methods for nonhomogeneous Rosenau-Burgers equation[J]. *Mathematics in Practice and Theory*, 2021, 51(6): 246-256.
- [12] OMRANI K, DEBEERIA H, BAYARASSOU K. On the numerical solution of two-dimensional Rosenau-Burgers (RB) equation[J]. *Engineering with Computers*, 2020: 827-829.
- [13] ZHANG J, LIU Z X, LIN F B, et al. Asymptotic analysis and error estimate for Rosenau-Burgers equation[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2019, 1-8.
- [14] 范恩贵. 可积系统与计算机代数[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [15] OVSIANNIKOV L V. Group Analysis of Differential Equations[M]. New York: Academic Press, 1982.
- [16] WANG M L, ZHOU Y B, LI Z B. Application of a homogeneous balance method to exact solutions of nonlinear equations in mathematical physics[J]. *Physics Letters A*, 1996, 216(1-5): 67-75.
- [17] 吴文俊. 数学机械化[M]. 北京: 科学出版社, 2003.

## Explicit travelling wave solutions and dynamic behaviors of the Rosenau equation

Lin Fubiao, Yang Xinxia, Zhang Qianhong

(School of Mathematics and Statistics, Guizhou University of Finance and Economics, Guiyang 550025, China)

**Abstract:** It is typically difficult to obtain explicit exact solutions of the Rosenau equation, it was usually intensively investigated by use of the numerical schemes and techniques. Firstly, symmetric groups, reduced ordinary differential equations and group invariant solutions of the Rosenau equation were given by the method of classical Lie group analysis. Secondly, an  $\exp(-\varphi(\xi))$ -expansion method for solving analytically nonlinear partial differential equation was constructed. Moreover, explicit travelling wave solutions of the Rosenau equation were found by using the  $\exp(-\varphi(\xi))$ -expansion method, the corresponding dynamic behaviors of solutions were also analyzed. Finally, on the one hand, the existence of solutions of the Rosenau equation was demonstrated by these obtained explicit travelling wave solutions. These obtained exact solutions can be used to verify accuracy of numerical solution, test advantages and disadvantages of numerical discrete scheme, and study dynamic behaviors of solutions. In addition, it also provides a theoretical basis for the practical application in the field of engineering.

**Keywords:** Rosenau equation; explicit travelling wave solution; dynamic behavior

[责任编辑 陈留院 赵晓华]