

一类迁移人群具有部分免疫的肺结核模型的分析

方舒¹,张太雷¹,刘俊利²

(1.长安大学 理学院,西安 710064;2.西安工程大学 理学院,西安 710048)

摘要:为预防肺结核疾病的传播,利用传染病建模思想,建立了一类迁移人群具有部分免疫的饱和发生率的肺结核模型.分析表明当移入潜伏者和染病者的比例均为 0 时模型才存在无病平衡点和基本再生数 $\mathcal{R}_0$. 利用 Lyapunov 函数方法证明了当 $\mathcal{R}_0 \leq 1$ 时,无病平衡点 P^0 是全局渐近稳定的;当 $\mathcal{R}_0 > 0$ 时,无病平衡点 P^0 是不稳定的. 同时模型存在唯一的全局渐近稳定的地方病平衡点 P^* . 数值模拟结果与理论结果相一致,并使用模型对我国未来几年肺结核疫情进行了预测.

关键词:迁移人群;部分免疫;非线性发生率;全局渐近稳定
中图分类号:O175.1 **文献标志码:**A

肺结核是当前严重危害人类健康的一种慢性呼吸道传染病,其对于患者的身体影响非常大,主要是由结核分枝杆菌引起,每年肺结核患者的人数都在呈现上升的趋势^[1].据估计,我国拥有近 5.5 亿的肺结核感染人群.结核病的高发人群是流动人口中的青壮年,特别是务工人员中结核患者如未能及时发现和治疗,容易感染给别人^[2],因此迁移人群的骤增给肺结核防治工作增加了新的难题.针对迁移人群肺结核的防治这一问题,很多学者尝试利用数学建模的方法在这方面做了大量工作^[3-7].文献[3]建立了具有外来迁移人群以及饱和发生率的肺结核传染病模型,分析表明若有感染者移民到一个地区,则无法消除这个地区的疾病.文献[4]建立了人口密度不同的两地区之间流动的 SEIR 流行病动力学模型,分析表明,高人口密度地区向低人口密度地区迁移可以降低基本再生数,缩小染病规模.文献[5-7]分别考虑离散化后的传染病模型,具有肺结核感染快慢反应,以及具有传染年龄和非线性发生率的数学模型,均对模型进行了稳定性分析.很多学者也针对肺结核疫苗接种的防治这一问题做了大量的工作^[8-10].分别建立相应的具有疫苗接种的肺结核传染病模型,并对模型进行动力学分析.卫生防疫部门规定,新生儿出生后 24 h 内需注射卡介苗.卡介苗可以有效地保护儿童预防结核病,但对成年人接种卡介苗并无大作用^[11].而以上的研究工作均没有考虑接种者和被接种者具有部分免疫的情形.因此本文考虑到迁移人群的部分免疫性建立一类迁移人群具有部分免疫的 SVEIR 肺结核传染病模型,并使用模型对我国近些年肺结核的疫情进行拟合和预测.

1 模型的建立

将总人群分为 5 个仓室:易感者,接种者,潜伏者,染病者,恢复者,其 t 时刻的人口数量分别记为 $S(t)$, $V(t)$, $E(t)$, $I(t)$, $R(t)$. 建立如下模型

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Lambda h(1 - \eta) - \frac{\beta_1 SI}{1 + \alpha I} - \mu S, \frac{dV}{dt} = \Lambda \omega + \Lambda h \eta - \phi V - \mu V - \frac{\beta_2 VI}{1 + \alpha I}, \\ \frac{dE}{dt} = \Lambda p + \frac{\beta_1 SI}{1 + \alpha I} + \frac{\beta_2 VI}{1 + \alpha I} - \mu E - \epsilon E - \gamma_1 E, \frac{dI}{dt} = \Lambda q + \epsilon E - \gamma_2 I - \mu I - \delta I, \\ \frac{dR}{dt} = \Lambda(1 - \omega - p - q - h) + \gamma_2 I + \gamma_1 E + \phi V - \mu R, \end{cases} \quad (1)$$

收稿日期:2019-01-26;修回日期:2019-08-13.
基金项目:国家自然科学基金(11701041);陕西省自然科学基金基础研究计划(2018JM1011).
作者简介:方舒(1995—),女,陕西佳县人,长安大学硕士研究生,研究方向为生物数学,E-mail:fsh02011@126.com.
通信作者:张太雷,E-mail:t.l.zhang@126.com.

其中, μ 为人群的自然死亡率; δ 为因病死亡率; ϵ 为从潜伏者转化为染病者的转化系数. 总的移入或新生人群为 Λ , 分别以 h, ω, p, q 的比例进入易感者、接种者、潜伏者、染病者等仓室, 其余的进入恢复者仓室. η 表示新生儿接种疫苗的比例; γ_1 和 γ_2 分别是潜伏者和染病者的恢复率; α 为衡量人群的行为抑制因素. β_1 和 β_2 分别表示染病者感染易感者和接种者所具有的传染率系数, 根据传染病免疫接种的意义有 $\beta_2 < \beta_1$. ϕ 表示接种疫苗后获得永久免疫进入恢复者的转移比例, 这里假定所有参数均为非负常数, 且 $1 - \omega - p - q - h \geq 0$.

由于模型(1)中的前4个方程不含 R , 故只需讨论模型(1)的前4个方程, 得到等价模型

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Lambda h(1 - \eta) - \frac{\beta_1 SI}{1 + \alpha I} - \mu S, & \frac{dV}{dt} = \Lambda \omega + \Lambda h \eta - \phi V - \mu V - \frac{\beta_2 VI}{1 + \alpha I}, \\ \frac{dE}{dt} = \Lambda p + \frac{\beta_1 SI}{1 + \alpha I} + \frac{\beta_2 VI}{1 + \alpha I} - \mu E - \epsilon E - \gamma_1 E, & \frac{dI}{dt} = \Lambda q + \epsilon E - \gamma_2 I - \mu I - \delta I, \end{cases} \quad (2)$$

则模型(2)的正向不变集为 $\Omega_1 = \left\{ (S, V, E, I) \in R_+^4 \mid S + V + E + I \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}$.

2 无病平衡点的稳定性

记 $m = \mu + \phi, n = \mu + \epsilon + \gamma_1, g = \mu + \gamma_2 + \delta, \frac{\beta_1 SI}{1 + \alpha I} \triangleq Sf_1(I), \frac{\beta_2 VI}{1 + \alpha I} \triangleq Vf_2(I)$. 显然模型(2)在 $p = q = 0$ 时有一个相应于疾病消除的无病平衡点 $P^0(S^0, V^0, 0, 0)$, 其中, $S^0 = \frac{\Lambda h(1 - \eta)}{\mu}, V^0 = \frac{\Lambda \omega + \Lambda h \eta}{m}$.

进一步得到模型(2)的正向不变集为 $\Omega = \left\{ (S, V, E, I) \in R_+^4 \mid S + V + E + I \leq \frac{\Lambda}{\mu} \text{ 且 } S < S^0, V < V^0 \right\}$.

可以根据文献[12]可得模型(2)的基本再生数为 $\mathcal{R}_0 = \frac{\epsilon m \beta_1 \Lambda h(1 - \eta) + \epsilon \mu \beta_2 \Lambda (\omega + h \eta)}{\mu m n g}$.

定理1 若 $p = q = 0$, 当 $\mathcal{R}_0 \leq 1$ 时, 则模型(2)的无病平衡点 P^0 是局部渐近稳定的; 当 $\mathcal{R}_0 > 1$, 模型(2)的无病平衡点 P^0 是不稳定的.

证明 模型(2)在无病平衡点 $P^0(S^0, V^0, 0, 0)$ 处雅可比矩阵对应的特征方程为

$$(\lambda + \mu)(\lambda + m)[(\lambda + g)(\lambda + n) - \epsilon(\beta_1 S^0 + \beta_2 V^0)] = 0. \quad (3)$$

显然, 方程(3)有 $\lambda_1 = -\mu < 0, \lambda_2 = -m < 0$, 而其他特征根满足:

$$\lambda^2 + (n + g)\lambda + ng - \epsilon(\beta_1 S^0 + \beta_2 V^0) = 0. \quad (4)$$

当 $\mathcal{R}_0 \leq 1$ 时, 可以直接得 $ng - \epsilon(\beta_1 S^0 + \beta_2 V^0) \geq 0$, 所以方程(4)有两个具有负实部的特征根. 由 Routh-Hurwitz 判据知方程(3)的所有特征根均具有负实部, 则无病平衡点 $P^0(S^0, V^0, 0, 0)$ 是局部渐近稳定的. 同理当 $\mathcal{R}_0 > 1$ 时, 方程(3)有正实根, 所以无病平衡点 $P^0(S^0, V^0, 0, 0)$ 是不稳定的, 证明完毕.

定理2 若 $p = q = 0$, 当 $\mathcal{R}_0 \leq 1$ 时, 模型(2)的无病平衡点 P^0 全局渐近稳定.

证明 构造 Lyapunov 函数: $V(E, I) = \epsilon E + nI$. 则沿模型(2)轨线的全导数为

$$\frac{dV}{dt} = \epsilon \left(\frac{\beta_1 SI}{1 + \alpha I} + \frac{\beta_2 VI}{1 + \alpha I} - nE \right) + n(\epsilon E - gI) \leq I[\epsilon(\beta_1 S^0 + \beta_2 V^0) - ng],$$

即当 $\mathcal{R}_0 < 1$ 时, 有 $\frac{dV}{dt} \leq 0$, 故模型(2)轨线的 ω 极限集在集合 $M_1 = \left\{ (S, V, E, I) \mid \frac{dV}{dt} = 0 \right\} = \{(S, V, E, I) \mid I = 0\}$ 中. 在集合 M_1 中模型(2)的解满足 $E(t) = E(0)e^{-nt}$, 则当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $E \rightarrow 0$. 同理可以得出, 在集合 M_1 中当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $S \rightarrow S^0, V \rightarrow V^0$, 所以 $\{P^0\}$ 是模型(2)在 M_1 中的最大 ω 极限集. 由 LaSalle 不变集原理知, 在 Ω 内的任何轨线都趋于 P^0 . 接下来讨论 $\mathcal{R}_0 = 1$ 时情形, 因为

$$\frac{dV}{dt} \leq \epsilon \frac{\beta_1 (S - S^0)I}{1 + \alpha I} + \epsilon \frac{\beta_2 (V - V^0)I}{1 + \alpha I} \leq 0,$$

则 $M_2 = \left\{ (S, V, E, I) \mid \frac{dV}{dt} = 0 \right\} = \{(S, V, E, I) \mid S = S^0 \text{ 且 } V = V^0 \text{ 或 } I = 0\}$, 经讨论 $\{P^0\}$ 是模型(2)在 M_2

中的 ω 极限集.综上所述,由 LaSalle 不变集原理知,在 Ω 内的任何轨线都趋于 P^0 .故当 $\mathcal{R}_0 \leq 1$ 时,无病平衡点 $P^0(S^0, V^0, 0, 0)$ 是全局渐近稳定的,得证.

3 地方病平衡点的稳定性

本节讨论当 p, q 不全为零时,模型(2)不再存在无病平衡点.假设模型(2)存在地方病平衡点 $P^*(S^*, V^*, E^*, I^*)$, 令模型右端为零求解以下代数方程组

$$\begin{cases} \Lambda h(1-\eta) - S^* f_1(I^*) - \mu S^* = 0, \\ \Lambda \omega + \Lambda h \eta - m V^* - V^* f_2(I^*) = 0, \\ \Lambda p + S^* f_1(I^*) + V^* f_2(I^*) - n E^* = 0, \\ \Lambda q + \epsilon E^* - g I^* = 0, \end{cases} \quad (5)$$

由方程组(5)的第 1, 第 2 和第 4 个方程,可以得到 $S^* = \frac{\Lambda h(1-\eta)}{f_1(I^*) + \mu} = \frac{\Lambda h(1-\eta)(1+\alpha I^*)}{\beta_1 I^* + \mu(1+\alpha I^*)}$, $V^* =$

$$\frac{\Lambda \omega + \Lambda h \eta}{f_2(I^*) + m} = \frac{(\Lambda \omega + \Lambda h \eta)(1+\alpha I^*)}{\beta_2 I^* + m(1+\alpha I^*)}, E^* = \frac{g I^* - \Lambda q}{\epsilon},$$

代入方程组(5)的第 3 个方程得到:

$$0 = \Lambda p + \frac{\Lambda h(1-\eta) f_1(I^*)}{f_1(I^*) + \mu} + \frac{(\Lambda \omega + \Lambda h \eta) f_2(I^*)}{f_2(I^*) + m} - \frac{n g I^* - \Lambda n q}{\epsilon}. \quad (6)$$

将(6)式展开整理可以得出 $0 = a_1(I^*)^3 + a_2(I^*)^2 + a_3(I^*)^1 + a_4$. 当 $\frac{\beta_2(\Lambda \omega + \Lambda h \eta)\epsilon}{n g m} + \frac{\beta_1 \Lambda h(1-\eta)\epsilon}{n g \mu} \geq$

1 时,即 $a_3 > 0$. 因此根据笛卡尔符号法则知在 $\left(\frac{\Lambda q}{g}, +\infty\right)$ 上存在唯一的正根 I^* . 当 $\frac{\beta_2(\Lambda \omega + \Lambda h \eta)\epsilon}{n g m} +$

$\frac{\beta_1 \Lambda h(1-\eta)\epsilon}{n g \mu} < 1$ 时,令 $H(x) = \Lambda p + \frac{\Lambda h(1-\eta) f_1(x)}{f_1(x) + \mu} + \frac{(\Lambda \omega + \Lambda h \eta) f_2(x)}{f_2(x) + m} - \frac{n g x - \Lambda n q}{\epsilon}$. 由于

$f_1\left(\frac{\Lambda q}{g}\right)$ 和 $f_2\left(\frac{\Lambda q}{g}\right) > 0$, 则

$$H\left(\frac{\Lambda q}{g}\right) = \Lambda p + \frac{\Lambda h(1-\eta) f_1\left(\frac{\Lambda q}{g}\right)}{f_1\left(\frac{\Lambda q}{g}\right) + \mu} + \frac{(\Lambda \omega + \Lambda h \eta) f_2\left(\frac{\Lambda q}{g}\right)}{f_2\left(\frac{\Lambda q}{g}\right) + m} > 0,$$

并且 $H(x) \rightarrow -\infty (x \rightarrow +\infty)$. 又

$$H'(x) \leq -\frac{n g}{\epsilon} + \frac{\Lambda h(1-\eta)\beta_1}{\mu} + \frac{(\Lambda \omega + \Lambda h \eta)\beta_2}{m} = \frac{\Lambda h(1-\eta)\beta_1\epsilon}{\mu n g} + \frac{(\Lambda \omega + \Lambda h \eta)\beta_2\epsilon}{m n g} - 1 < 0,$$

结合 $f(x)$ 单调递增, $f'(x) \geq 0$, 故 $H'(x) < 0$, 即 $H(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{\Lambda q}{g}, +\infty\right)$ 上存在唯

一的正根 I^* . 当 $I^* < \frac{\Lambda q}{g}$ 时, $E^* < 0$, 所以不存在正根. 因此综上所述得出模型(2)总存在唯一的地方病平衡点 $P^*(S^*, V^*, E^*, I^*)$.

定理 3 模型(2)的地方病平衡点 P^* 是全局渐近稳定的.

证明 考虑 Lyapunov 函数

$$V(S, V, E, I) = S^* \varphi\left(\frac{S}{S^*}\right) + V^* \varphi\left(\frac{V}{V^*}\right) + E^* \varphi\left(\frac{E}{E^*}\right) + \frac{S^* f_1(I^*) + V^* f_2(I^*)}{\epsilon E^*} I^* \varphi\left(\frac{I}{I^*}\right),$$

其中 $\varphi(x) = x - 1 - \ln(x)$. 则沿模型(2)轨线的全导数为

$$\frac{dV}{dt} = \left(1 - \frac{S^*}{S}\right) (\Lambda h(1-\eta) - S f_1(I) - \mu S) + \left(1 - \frac{V^*}{V}\right) (\Lambda \omega + \Lambda h \eta - V f_2(I) - m V) +$$

$$\begin{aligned} &\left(1-\frac{E^*}{E}\right)(\Lambda p-Sf_1(I)+Vf_2(I)-nE)+\frac{S^*f_1(I^*)+V^*f_2(I^*)}{\epsilon E^*}\left(1-\frac{I^*}{I}\right)(\Lambda q+ \\ &\epsilon E-gI)=-\frac{\mu(S-S^*)^2}{S}-\frac{m(V-V^*)^2}{V}-\Lambda p\frac{(E-E^*)^2}{EE^*}- \\ &\Lambda q\frac{[S^*f_1(I^*)+V^*f_2(I^*)](I-I^*)^2}{\epsilon E^*II^*}+S^*f_1(I^*)A+V^*f_2(I^*)B, \end{aligned}$$

其中

$$A=3-\frac{S^*}{S}+\frac{f_1(I)}{f_1(I^*)}-\frac{E^*Sf_1(I)}{ES^*f_1(I^*)}-\frac{EI^*}{E^*I}-\frac{I}{I^*}, B=3-\frac{V^*}{V}+\frac{f_2(I)}{f_2(I^*)}-\frac{E^*Vf_2(I)}{EV^*f_2(I^*)}-\frac{EI^*}{E^*I}-\frac{I}{I^*}.$$

记 $A=\varphi\left(\frac{f_1(I)}{f_1(I^*)}\right)-\varphi\left(\frac{S^*}{S}\right)-\varphi\left(\frac{E^*Sf_1(I)}{ES^*f_1(I^*)}\right)-\varphi\left(\frac{EI^*}{E^*I}\right)-\varphi\left(\frac{I}{I^*}\right)$, 令 $F(I)=\varphi\left(\frac{f_1(I)}{f_1(I^*)}\right)-\varphi\left(\frac{I}{I^*}\right)$, 可得 $\frac{dF(I)}{dI}=\left(\frac{1}{I}-\frac{1}{I^*}\right)\left(1-\frac{1}{(1+\alpha I)^2}\right)$.

从而当 $I \geq I^*$ 时, $\frac{dF(I)}{dI} \leq 0$. 当 $I \leq I^*$ 时, $\frac{dF(I)}{dI} \geq 0$. 因此 $\max F(I)=F(I^*)=0$, 即 $A \leq 0$, 等号成立当且仅当 $I=I^*$. 同理可得 $B \leq 0$, 等号成立当且仅当 $I=I^*$. 即 $S=S^*, V=V^*, E=E^*, I=I^*$ 时 $\frac{dV}{dt}=0$. 综上所述根据 LaSalle 不变集原理知 $t \rightarrow \infty$ 时, $(S, V, E, I) \rightarrow (S^*, V^*, E^*, I^*)$, 故模型(2)的地方病平衡点 P^* 是全局渐近稳定的, 证毕.

4 数值模拟

4.1 数值模拟

图 1(a)显示了选取参数 $p=q=0, \Lambda=1, \epsilon=0.60, \beta_1=0.40, \beta_2=0.32, \mu=0.30, \phi=0.60, \delta=0.20, \gamma_1=0.10, \gamma_2=0.40, \omega=0.40, h=0.30, \delta=0.20, \gamma_1=0.10, \gamma_2=0.40, \phi=0.60, \eta=0.15, \alpha=0.20$, 此时基本再生数 $\mathcal{R}_0=0.3321 \leq 1$, 模型(2)的解曲线趋向于无病平衡点 $P^0(0.8492, 0.4944, 0, 0)$.

图 1(b)显示了当 p, q 不全为零时, 即选取参数 $p=0.15, q=0.05, \mu=0.30, h=0.30, \delta=0.20, \gamma_1=0.10, \gamma_2=0.40, \phi=0.60, \Lambda=10, \epsilon=0.60, \beta_1=0.40, \beta_2=0.32, \omega=0.40, \alpha=0.20, \eta=0.15$, 此时基本再生数 $\mathcal{R}_0=3.3215 > 1$, 经验证模型(2)的解曲线趋向于地方病平衡点 $P^*(2.1082, 2.7316, 5.4124, 4.1538)$.

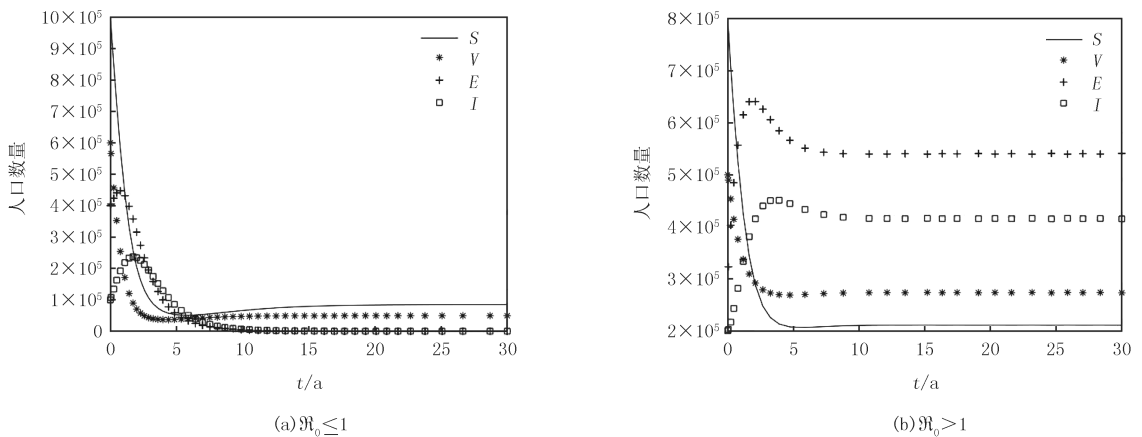


图1 模型(2)关于时间 t 的解曲线

Fig.1 The figures of the solution of the model (2) on time t

4.2 参数的敏感性分析

理论分析表明, 当参数 $p=q=0$ 时, 阈值是影响疾病是否流行的主要因素, 本文所建立的传染病模型的

基本再生数 $\mathcal{R}_0 = \frac{\epsilon m \beta_1 \Delta h (1 - \eta) + \epsilon \mu \beta_2 \Delta (\omega + h \eta)}{\mu m n g}$, 为了检测它对各参数的依赖性, 利用 PRCCs (偏秩相关系数) 方法对模型基本再生数 $\mathcal{R}_0$ 中的参数作敏感性分析, 以确定各参数对阈值的影响大小. 从图 2 可以看出, 因素都对疾病的爆发或消除有着不同程度的影响. 因此, 经过分析可以得出减少和控制该传染病的传播的几个有效方法.

- 1) 控制潜伏者转化为感染者的转化系数 ϵ 使其减小, 即延长疾病的潜伏期或在潜伏期对疾病的潜伏者进行有效的治疗使其避免发展为感染者.
- 2) 控制疾病的染病者感染一个易感者的传染力 β_1 使其降低, 即在日常生活中易感者人群尽量避免接触患者, 或注意个人卫生以阻断肺结核的感染途径.
- 3) 控制新生儿接种疫苗的比例 η 使其增大, 即加强对新生儿的疫苗接种.
- 4) 控制染病者的恢复率系数 γ_2 使其增大, 即缩短疾病的治愈周期.
- 5) 控制总的迁移人群 Δ 使其减小, 即减少外来人口同时鼓励产妇及时产检.
- 6) 图 3 是选取 $\alpha_1=0.2, \alpha_2=0.4, \alpha_3=0.7$ 3 个不同的值时相应染病者的变化曲线. 如图 3 所示, 通过增大该传染病中人群的行为抑制因素 α 就能有效地抑制疾病的传播与爆发. 故可以通过宣传增加人们对疾病的认识, 使人们了解其传播途径和发病机理等各种知识, 定期体检以增加自我防范意识.

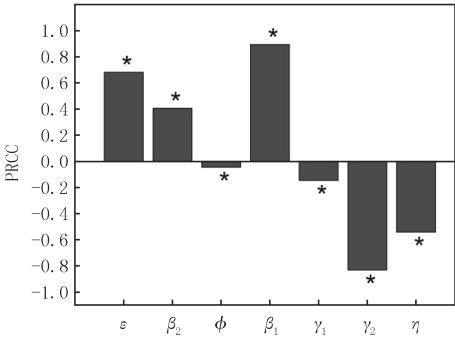


图2 部分相关系数 (PRCCs) 的结果

Fig.2 Partial correlation coefficients (PRCCs) results

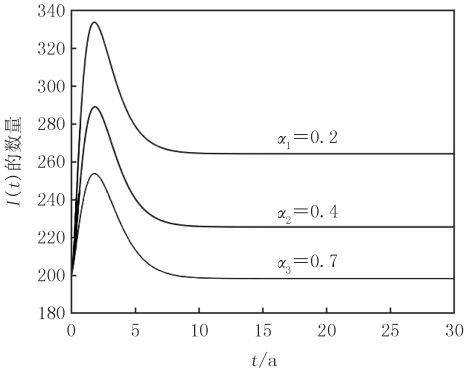


图3 不同 α 值下的染病者数量

Fig.3 The number of people infected for different values of α

4.3 我国 TB 流行趋势

本节通过模型(2)对我国从 2003 年到 2017 年的肺结核患者数据进行模拟, 以此预测未来几年的肺结核发展趋势. 图 4 表示模型模拟的数据和真实数据的拟合程度, 在模拟过程中需要用到大部分参数可以从文献中获得, 也有的参数需要利用最小二乘法搜索得到, 其中所用数据均列于表 1 和表 2 中. 可以从图 4 中直观地看出, 该肺结核模型模拟的结果与实际发展趋势一致, 同时得到未来肺结核患者将达到平稳的趋势并伴随有略微减小的趋势.

表 1 肺结核模型的参数

Tab.1 Parameters of the tuberculosis model

参数	参数的意义	参数值	来源	参数	参数的意义	参数值	来源
Δ	平均新增迁移人数	223 840	文献[13]	γ_1	肺结核患者的恢复率	0.55	文献[15]
μ	人口的死亡率	0.013 4	文献[14]	α	人群的行为抑制因素	0.910	估计
ϵ	进展为肺结核的自然发生率	0.4	文献[14]	ϕ	接种者的永久免疫率	0.320	估计
δ	因病死亡率	0.033 3	文献[14]	η	新生儿接种疫苗的比率	0.751	估计
γ_2	肺结核患者的恢复率	0.7	文献[15]				

表 2 中国 2003 年到 2017 年的肺结核患者数据
Tab.2 Data of tuberculosis patients in China from 2003 to 2017

年份	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
人口/人	706 087	970 278	1 259 308	1 127 571	1 499 266	1 169 540	1 076 938	991 350
年份	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	
人口/人	953 275	951 508	904 434	889 381	864 015	836 236	835 195	

5 结 论

本文建立了迁移人群的 SVEIR 肺结核传染病模型,通过理论分析研究无病平衡点和地方病平衡点的存在性和稳定性,并利用数值模拟验证理论结果.同时对所建模型的基本再生数 $\mathcal{R}_0$ 中部分参数作偏执相关系数分析,分析出可以采取延长肺结核的潜伏期,降低染病者的感染力、增强对肺结核的治愈能力、加强对新生儿的接种力度、控制总的移入或新生人群数量、增强人们对肺结核的自我防范意识等措施,对控制肺结核有很大的作用.最后对所建模型进行数据模拟,得到拟合的结果和实际肺结核患者数据基本符合,并预测了我国未来几年肺结核疫情,结果表明肺结核疫情将呈现平稳且下降的趋势.

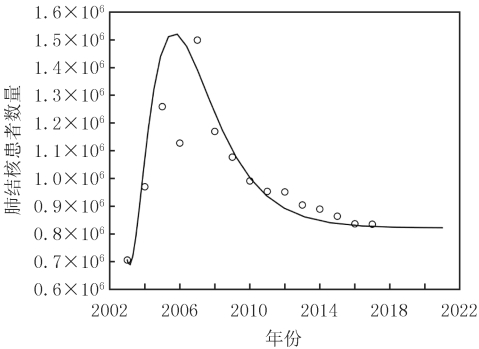


图4 中国2003年到2017年的肺结核患者与模型(2)拟合的数据对比
Fig.4 Data comparison between Chinese tuberculosis patients and models (2) from 2003 to 2017 in China

参 考 文 献

[1] 庞创生.结核病的临床诊断及研究进展[J].饮食保健,2018,5(27):283-284.
PANG C S.Clinical Diagnosis and Research Progress of Tuberculosis[J].Diet Health,2018,5(27):283-284.

[2] 李富贵.流动人口肺结核患病特征研究[J].中国实用医药,2013,8(26):271-272.
LI F G.Study on the Characteristics of Tuberculosis in Migration Population[J].China Practical Medicine,2013,8(26):271-272.

[3] SIGDEL R P,MCCLUSKEY C C.Global Stability for an SEI Model of Infectious Disease with Immigration[M].Elsevier Science Inc, 2014,243:684-689.

[4] 冯业娟,许传青,崔景安,等.两地区人口流动肺结核动力学模型研究[J].应用数学进展,2019,8(3):550-560.
FENG Y J,XU C Q,CUI J A,et al.Dynamic Model of Tuberculosis in Population Migration between Two Regions[J].Advances in Applied Mathematics,2019,8(3):550-560.

[5] 王丽君,张宇青,王晓倩,等.一类带移民项的离散 SEI 传染病模型的全局稳定性[J].数学的实践与认识,2017,47(15):302-306.
WANG L J,ZHANG Y Q,WANG X Q,et al.Global Stability of a Discrete SEI Model of Infectious Disease with Immigration[J].Mathematics in Practice and Theory,2017,47(15):302-306.

[6] 许传青,韦宵宵,崔景安,等.带有外来流入人口和快慢反应的肺结核模型研究[J].生物数学学报,2017,32(1):75-83.
XU C Q,WEI X X,CUI J A,et al.The Study of Pulmonary Tuberculosis Model with Immigration and Fast Slow Progression[J].Journal of Blomathematics,2017,32(1):75-83.

[7] 韦宵宵,许传青,王晓静,等.带有外来移入人口的肺结核传染病模型[J].北京建筑大学学报,2016,32(2):70-73.
WEI X X,XU C Q,WANG X J,et al.Epidemic Model with the Immigration Population[J].Journal of Beijing University of Civil Engineering and Architecture,2016,32(2):70-73.

[8] 彭宝洋,刘俊利,刘璐菊.一类具有卡介苗接种的肺结核模型的全局动力学分析[J].纺织高校基础科学学报,2015,28(3):271-275.
PENG B Y,LIU J L,LIU L J.Global Dynamics of a Tuberculosis Model with BCG Vaccination[J].Basic Sciences Journal of Textile Universities,2015,28(3):271-275.

[9] 杨高艳,胡新利,高亚男.具有接种与治疗的肺结核模型稳定性分析[J].纺织高校基础科学学报,2017,30(4):496-502.
YANG G Y,HU X L,GAO Y N.The Stability Analysis for a Tuberculosis Model with Vaccination and Treatment[J].Basic Sciences Journal of Textile Universities,2017,30(4):496-502.

[10] 霍海峰,邹明轩.一类具有接种和隔离治疗的结核病模型的稳定性[J].兰州理工大学学报,2016(3):150-154.

HUO H F,ZOU M X.Stability of a Tuberculosis Model with Vaccination and Isolation Treatment[J].Journal of Lanzhou University of Technology,2016(3):150-154.

[11] 张青.成人需要补种“卡介苗”吗[J].家庭用药,2011(12):40.

ZHANG Q.Do Aadults need to Replant BCG[J].Family Medicines,2011(12):40.

[12] DRIESSCHE P V D,JAMES W.Reproduction Numbers and Sub-threshold Endemic Eequilibria for Compartmental Models of Disease Transmission[J].Mathematical Biosciences,2002,180(1/2):29-48.

[13] GUO H B,WU J H.Persistent High Incidence of Tuberculosis among Immigrants in Alow-incidence Country:Impact of Immigrants with Early or Late Latency[J].Mathematical Biosciences and Engineering Mbe,2012,8(3):695-709.

[14] PIENAAR E,FLUITT A M,WHITNEY S E,et al.A Model of Tuberculosis Transmission and Intervention Strategies in an Urban Residential Area[J].Computational Biology and Chemistry,2010,34(2):86-96.

[15] BHUNU C P,GARIRA W,MUKANDAVIRE Z,et al.Tuberculosis Transmission Model with Chemoprophylaxis and Treatment[J].Bulletin of Mathematical Biology,2008,70(4):1163-1191.

Analysis on a tuberculosis model with partial immunity in migration population

Fang Shu¹,Zhang Tailei¹,Liu Junli²

(1.School of Science,Changan University,Xi'an 710064,China;2.School of Science,Xi'an Polytechnic University,Xi'an 710048,China)

Abstract: In order to prevent the spread of tuberculosis,a kind of tuberculosis model with partial immunity in migration population and saturation incidence with the modeling idea of infectious disease is established.The analysis shows that the model has a unique disease-free equilibrium point P^0 and the basic reproductive number $\mathcal{R}_0$ when migration population entering the incubation and infection population respectively are both zero.When $\mathcal{R}_0 \leq 1$ the globally asymptotic stability of disease-free equilibrium point P^0 is proved by the functions methods and the disease-free equilibrium point P^* is unstable. Meanwhile,the model has a unique endemic equilibrium point which is globally asymptotically stable.Numerical simulation results are in accordance with the corresponding theoretical results obtained in this paper,and the model is used to forecast the epidemic trend of tuberculosis of China in the future years.

Keywords: migration population;partial immunity;nonlinear incidence rate;globally asymptotically stable

[责任编辑 陈留院 赵晓华]