

具有分数 Brown 运动的分数阶中立型随机微分方程解的存在唯一性

李国平¹, 韩婷^{1,2}

(1. 宁夏大学 新华学院, 银川 750021; 2. 宁夏大学 数学统计学院, 银川 750021)

摘要: 研究了一类在 Hilbert 空间中具有分数 Brown 运动的分数阶中立型随机微分方程, 利用 Picard 逐步逼近法得到了其非 Lipschitz 条件和弱化的线性增长条件下粘性解的新的存在唯一性的充分条件. 所提的研究方法使得先前一些研究结果得到了拓展. 最后通过具有分数 Brown 运动的随机非线性波动方程验证了理论的有效性.

关键词: 分数阶随机微分方程; 分数 Brown 运动; 粘性解; 存在唯一性

中图分类号: O175.14

文献标志码: A

文章编号: 1000-2367(2025)03-0104-08

中立型随机微分方程因其在理论和实际中具有重要意义, 引起了越来越多学者的关注^[1-3]. 分数阶中立型随机微分方程同时包含了分数阶导数和滞后项, 可以用来描述具有长程记忆和非局部相关性的随机现象, 因而在随机控制、金融工程、生态学等领域中具有广泛的应用. 近年来, 分数阶中立型随机微分方程有着显著的发展^[4-6]. 分数 Brown 运动是一种自相关性更强的随机过程, 在统计学上具有相似性和长程依赖性质. 其自相关性的变化由 Hurst 参数 $H \in (0, 1)$ 控制, 当 $H > \frac{1}{2}$ 时具有长记忆. 这些重要的特性使得分数 Brown 运动可以更好地描述一些非马尔可夫性质的随机过程, 如金融市场中的价格波动、气象学中的气温变化、地震学中的地震活动等. 为了更好地理解和模拟一些现实世界中的随机现象, 研究关于分数 Brown 运动和相关问题的随机微分方程具有重要意义. 学者们也对由分数 Brown 运动驱动的随机微分方程的理论进行了深入研究^[7-10]. 对于具有分数 Brown 运动的分数阶中立型随机微分方程的理论研究还不够完善.

本文考虑如下具有分数 Brown 运动的分数阶中立型随机微分方程

$$\begin{cases} d[J_t^{1-\alpha}(x(t) - u(t, x_t) - \varphi(0) + u(0, \varphi))] = [Ax(t) + f(t, x_t)]dt + g(t, x_t)dB^H(t) + \\ \int_Z h(t, x_t, z)\tilde{N}(dt, dz), t \geq 0, \\ x(t) = \varphi(t), t \in [-\tau, 0], \tau > 0, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\varphi \in C := C([-\tau, 0]; X)$ 表示从 $[-\tau, 0]$ 到 X 的所有连续函数全体, 其范数为 $\|\eta\|_C = \sup_{t \in [-\tau, 0]} \|\eta(t)\|_X$. $J_t^{1-\alpha}$ 是 $(1-\alpha)$ -阶 Riemann-Liouville 分数积分算子, 其中 $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. A 是 Hilbert 空间 X 中有界线性算子 $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ 的解析半群的无穷小生成元. B^H 是 Hilbert 空间 Y 上的具有 Hurst 参数

收稿日期: 2023-09-20; **修回日期:** 2023-12-04.

基金项目: 宁夏高等学校科学研究项目(NYG2024219; NYG2022114); 国家自然科学基金(62063028).

作者简介: 李国平(1982—), 男, 宁夏银川人, 宁夏大学新华学院副教授, 研究方向为随机系统的稳定性与控制, E-mail: lgp_125@163.com.

通信作者: 韩婷, E-mail: ndhanting@163.com.

引用本文: 李国平, 韩婷. 具有分数 Brown 运动的分数阶中立型随机微分方程解的存在唯一性[J]. 河南师范大学学报(自然科学版), 2025, 53(3): 104-111. (Li Guoping, Han Ting. Existence and uniqueness of solutions to fractional neutral stochastic differential equations with fractional brownian motion[J]. Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition), 2025, 53(3): 104-111. DOI: 10.16366/j.cnki.1000-2367.2023.09.20.0001.)

$H \in (\frac{1}{2}, 1)$ 的分数 Brown 运动. $x_t = \{x(t+\theta) : -\tau \leq \theta \leq 0\}$ 是 $C([- \tau, 0]; X)$ -值的随机过程. $u, f: \mathbf{R}_+ \times C \rightarrow X, g: \mathbf{R}_+ \times C \rightarrow \mathcal{L}_2^0(Y, X), h: \mathbf{R}_+ \times C \times Z \rightarrow X$ 均可测. 其中 $\mathcal{L}_2^0(Y, X)$ 表示从 Y 到 X 的所有 Q -Hilbert-Schmidt 算子的空间(见第 1 节).

由于微分方程解的存在唯一性是研究解的适定性的一个关键问题,而随机微分方程的解析解不易获得,因此对解的存在唯一性的研究显得尤为重要.文献[4-5]在 Lipschitz 条件下利用了不动点原理和 Picard 逐步逼近法讨论了一类中立型随机微分方程解的存在唯一性.文献[10]利用不动点原理研究了一类具有分数 Brown 运动的中立型随机微分方程解的存在唯一性,但对于分数阶中立型随机微分方程的解的研究结果,相关文献较少.同时对于系数满足全局 Lipschitz 条件和线性增长条件的情况,文献[6-8]给出了一类时滞分数阶中立型随机微分方程解的存在性和唯一性的结果.然而,当讨论现实世界中的变量应用时,全局 Lipschitz 条件甚至局部 Lipschitz 条件相对较强.本文讨论具有分数 Brown 运动的分数阶中立型随机微分方程在非 Lipschitz 条件以及弱化的线性增长条件下的粘性解的存在性和唯一性问题, Lipschitz 条件作为本文条件的特殊情形,从而使分数阶中立型随机微分方程解的存在性和唯一性理论得到了进一步扩展.

1 预备知识

令 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ 是由一族右连续递增的 σ -代数流 $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ 生成的完备概率空间,且满足 $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$. 令 $(Z, \mathcal{E}, \nu(dz))$ 是 σ -有限可测空间, $(p_t)_{t \geq 0}$ 是定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的平稳 Poisson 点过程,特征测度为 ν . 用 $N(t, dz)$ 表示 p_t 的计数测度. 对于 $\Lambda \in \mathcal{E}$ 使得 $\tilde{N}(t, \Lambda) := E(N(t, \Lambda)) = t\nu(\Lambda)$. 定义 $\tilde{N}(t, dz) := N(t, dz) - t\nu(dz)$, Poisson 鞅测度由 p_t 生成.

下面给出无限维分数 Brown 运动的 Wiener 积分的一些概念和引理.

考虑具有任意水平 b 的时间区间 $[0, b]$, 令 $\{\beta^H(t), t \in [0, b]\}$ 是具有 Hurst 参数 $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ 的一维分数 Brown 运动. 由定义可知 β^H 是中心 Gauss 过程, 协方差函数为

$$R_H(t, s) = E[\beta^H(t)\beta^H(s)] = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}).$$

另外, β^H 的 Wiener 积分可表示为

$$\beta^H(t) = \int_0^t K_H(t, s) dW(s), \quad (2)$$

其中 $W = \{W(t), t \in [0, b]\}$ 是 Wiener 过程, 当 $t > s$ 时, $K_H(t, s)$ 由下列式子给出

$$K_H(t, s) = c_H s^{\frac{1}{2}-H} \int_s^t (u-s)^{H-\frac{3}{2}} u^{H-\frac{1}{2}} du,$$

其中 $c_H = \frac{H(2H-1)}{\sqrt{B(2-2H, H-\frac{1}{2})}}$, $B(\cdot)$ 表示 Beta 函数. 当 $t \leq s$ 时, 取 $K_H(t, s) = 0$.

令 X 和 Y 是实的可分的 Hilbert 空间, $\mathcal{L}(Y, X)$ 是从 Y 到 X 的所有有界线性算子构成的空间, 具有通常的算子范数 $\|\cdot\|$. $Q \in \mathcal{L}(Y, Y)$ 是由 $Qe_n = \lambda_n e_n$ 定义的算子. 为了定义关于 Q -分数 Brown 运动的 Wiener 积分, 引入由所有 Q -Hilbert-Schmidt 算子 $\phi: Y \rightarrow X$ 构成的空间 $\mathcal{L}_2^0 := \mathcal{L}_2^0(Y, X)$. 如果 $\|\phi\|_{\mathcal{L}_2^0}^2 := \sum_{n=1}^{\infty} \|\sqrt{\lambda_n} \phi e_n\|^2 < \infty$, 且空间 $\mathcal{L}_2^0$ 是具有内积 $\langle \phi, \psi \rangle_{\mathcal{L}_2^0} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi e_n, \psi e_n \rangle$ 的可分的 Hilbert 空间, 则称 $\phi \in \mathcal{L}(Y, X)$ 是 Q -Hilbert-Schmidt 算子.

令函数在 $(\phi(s))_{s \in [0, b]}$ 在空间 $\mathcal{L}_2^0(Y, X)$ 上取值, ϕ 关于 B^H 的 Wiener 积分定义为

$$\int_0^t \phi(s) dB^H(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \sqrt{\lambda_n} \phi(s) e_n d\beta_n^H(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \sqrt{\lambda_n} (K_H^*(\phi e_n))(s) dW_n(s). \quad (3)$$

引理 1^[9] 如果 $\phi: [0, b] \rightarrow \mathcal{L}_2^0(Y, X)$ 满足 $\int_0^b \|\phi(s)\|_{\mathcal{L}_2^0}^2 ds < \infty$, 则式(3)中的和式是 X -值的随机变量,

并且有 $E \left\| \int_0^t \psi(s) dB^H(s) \right\|^2 \leq 2Ht^{2H-1} \int_0^t \left\| \psi(s) \right\|_{\mathcal{H}}^2 ds$.

假设 A 是解析半群 $T(t)$ 的无穷小生成元,且 $0 \in \rho(A)$,对于 $\beta \in (0,1)$,定义如下分数幂算子

$$(-A)^{-\beta} = \frac{\sin \pi \beta}{\pi} \int_0^\infty s^{-\beta} (sI - A)^{-1} ds.$$

定义 1^[11] 令 A 是解析半群 $T(t)$ 的最小生成元.对任意 $\beta > 0$,定义 $(-A)^\beta = ((-A)^{-\beta})^{-1}$.

引理 2^[11] 令 A 是解析半群 $T(t)$ 的无穷小生成元.如果 $0 \in \rho(A)$,则(i)若 $\beta \geq \gamma > 0$,则 $X_\beta \subset X_\gamma$;

(ii)若 $\beta, \gamma > 0$,则对任意 $x \in \mathcal{D}((-A)^\eta)$,有 $(-A)^{\beta+\gamma}x = (-A)^\beta(-A)^\gamma x$,其中 $\eta = \max(\beta, \gamma, \beta + \gamma)$;
(iii)对任意 $x \in \mathcal{D}((-A)^\beta)$,有 $T(t)(-A)^\beta x = (-A)^\beta T(t)x$; (iv)对任意 $\beta > 0$,存在正常数 C_β 使得 $\|(-A)^\beta T(t)\| \leq C_\beta t^{-\beta}$.

下面给出分数阶微积分的定义和一些特殊函数,见文献[8,12].

定义 2 设 $f : [0, b] \rightarrow X, \alpha > 0$, Riemann-Liouville 分数阶积分定义为

$$J_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds. \tag{4}$$

定义 3 设 $f : [0, b] \rightarrow X, \alpha > 0$, Riemann-Liouville 分数阶导数定义为

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{d}{dt} J_t^{1-\alpha} f(t). \tag{5}$$

定义 4 设 $f : [0, b] \rightarrow X, \alpha > 0$, Caputo 分数阶导数定义为

$${}^c D_t^\alpha f(t) = D_t^\alpha (f(t) - f(0)). \tag{6}$$

定义 5 Mittag-Leffler 函数定义为

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}, \alpha, \beta > 0, z \in C, \tag{7}$$

其中 C 表示复平面.当 $\beta = 1$,令 $E_\alpha(z) = E_{\alpha, 1}(z)$.

定义 6 Mainardi 函数定义为

$$M_\alpha(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-z)^n}{n! \Gamma(-\alpha n + 1 - \alpha)}, 0 < \alpha < 1, z \in C. \tag{8}$$

函数 $M_\alpha(r)$ 的 Laplace 变换(见文献[13]).且 $M_\alpha(z)$ 满足等式(9)(见文献[13]).

$$\int_0^\infty r^\delta M_\alpha(r) dr = \frac{\Gamma(\delta + 1)}{\Gamma(\alpha \delta + 1)}, \delta > -1, 0 < \alpha < 1. \tag{9}$$

下面给出方程(1)的粘性解定义.

定义 7 若随机过程 $\{x(t), t \in [0, b]\}, 0 \leq b < \infty$, 满足下列 3 个条件:

(i) $x(t)$ 是 $\mathcal{F}_t$ 可适应的,且 $\int_0^b \|x(t)\|_X^2 dt < \infty$ 几乎必然成立; (ii) $x(t) = \varphi(t), t \in [-\tau, 0]$; (iii) 对任意的 $t \in [0, b]$, 有

$$\begin{aligned} x(t) = & T_\alpha(t)[\varphi(0) - u(0, \varphi)] + u(t, x_t) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} A S_\alpha(t-s) u(s, x_s) ds + \\ & \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_\alpha(t-s) f(s, x_s) ds + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_\alpha(t-s) g(s, x_s) dB^H(s) + \\ & \int_0^t \int_Z (t-s)^{\alpha-1} S_\alpha(t-s) h(s, x_s, z) \tilde{N}(ds, dz), \end{aligned} \tag{10}$$

其中

$$T_\alpha(t)x = \int_0^\infty M_\alpha(r) T(t^\alpha r) x dr, t \geq 0, x \in X, \tag{11}$$

$$S_\alpha(t)x = \int_0^\infty \alpha r M_\alpha(r) T(t^\alpha r) x dr, t \geq 0, x \in X. \tag{12}$$

则该随机过程称为方程(1)的粘性解.

给出下列假设条件.

(H1) A 是有界线性算子 $\{T(t), t \geq 0\}$ 在 X 上的解析半群的无穷小生成元, 对 $t \geq 0$ 存在 $M \geq 1$ 使得

$$M := \sup_{t \in [0, \infty)} \|T(t)\| < \infty. \quad (13)$$

(H2) (i) 存在函数 $H(t, r): \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$, 对任意固定的 $r \geq 0$, 在 $t \geq 0$ 时局部可积. 并且对任意固定的 $t \in [0, b]$, $H(t, r)$ 是关于 r 的连续单调不减的凹函数. 此外, 对于任意 $t \in [0, b]$ 和 $u \in X$, 下列不等式成立: $\|f(t, u)\|_X^2 + \|g(t, u)\|_{\mathcal{H}_2}^2 + \int_Z \|h(t, u, z)\|_X^2 \nu(dz) \leq H(t, \|u\|_C^2), t \in [0, b]$.

(ii) 对任意常数 $\gamma > 0$, 微分方程 $\frac{d\theta}{dt} = \gamma H(t, \theta), t \in [0, b]$, 对任意初值 θ_0 有全局解.

(H3) (i) 存在函数 $G(t, r): \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$, 对任意固定的 $r \geq 0$, 在 $t \geq 0$ 时局部可积. 并且对任意固定的 $t \in [0, b]$, $G(t, r)$ 是关于 r 连续单调不减的凹函数, $G(t, 0) = 0$. 此外, 对任意固定的 $t \in [0, b]$ 和 $u, v \in X$, 下列不等式成立: $\|f(t, u) - f(t, v)\|_X^2 + \|g(t, u) - g(t, v)\|_{\mathcal{H}_2}^2 + \int_Z \|h(t, u, z) - h(t, v, z)\|_X^2 \nu(dz) \leq G(t, \|u - v\|_C^2), t \in [0, b]$.

(ii) 对任意常数 $\gamma > 0$, 若非负函数 $z(t)$ 满足 $z(t) \leq \gamma \int_0^t G(s, z(s)) ds, t \in [0, b]$, 则对任意 $t \in [0, b]$ 有 $z(t) = 0$ 成立.

(H4) 存在常数 $\beta \in (0, 1)$ 和 $K \geq 0$ 使得对任意 $x, y \in X$ 和 $t \geq 0$, 映射 $u(t, x) \in \mathcal{D}((-A)^\beta)$ 满足下列不等式 $\|(-A)^\beta u(t, x) - (-A)^\beta u(t, y)\|_X \leq K \|x - y\|_C$. 并假设 $t \geq 0$ 时, $u(t, 0) = 0$.

注 1 令 $G(t, u) = L(t)G_1(u), t \in [0, b]$, 其中 $L(t) \geq 0$ 且非负可积. $G_1(u): \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$, 是凹的非减函数, $G_1(0) = 0$, 当 $u > 0$ 时, $G_1(u) > 0$, 且 $\int_{0+} \frac{1}{G_1(u)} du = \infty$. 由微分方程比较定理可得假设 (H3-ii) 成立. 特别地, 若令 $G(t, u) = Lu, u \geq 0$, 其中 $L > 0$ 为常数, 则假设 (H3-i) 为 Lipschitz 条件. 文献 [2, 4-5] 中的 Lipschitz 条件是本文提出的条件的特殊情形.

2 解的存在唯一性

本节给出粘性解的存在唯一性定理.

定理 1 若 (H1)~(H4) 以及下列不等式成立

$$l := \frac{5K^2 \alpha^2 b^{2\alpha\beta} C_{1-\beta}^2 \Gamma^2(\beta+1)}{(2\alpha\beta-1)\Gamma^2(\alpha\beta+1)(1-K\|(-A)^{-\beta}\|)} + K\|(-A)^{-\beta}\| < 1, \quad (14)$$

其中 $\alpha\beta > \frac{1}{2}$, $C_{1-\beta}$ 在引理 2 中给出, 则方程 (1) 在空间 $C[-\tau, 0]; X$ 中存在唯一解.

证明 令 $x^0(t) = T_a(t)\varphi(0), t \in [0, b]$ 且 $x^n(t) = \varphi(t), n = 0, 1, 2, \dots$. 对 $t \in [-\tau, 0]$, 定义下列逐次逼近序列: 对每个整数 $n = 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned} x^n(t) = & T_a(t)[\varphi(0) - u(0, \varphi)] + u(t, x_t^n) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} AS_a(t-s)u(s, x_s^n)ds + \\ & \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_a(t-s)f(s, x_s^{n-1})ds + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_a(t-s)g(s, x_s^{n-1})dB^H(s) + \\ & \int_0^t \int_Z (t-s)^{\alpha-1} S_a(t-s)h(s, x_s^{n-1}, z)\tilde{N}(ds, dz). \end{aligned} \quad (15)$$

证明分为如下 3 个步骤.

步骤 1 证明 对 $0 \leq t \leq b$, 序列 $\{x^n(t), n \geq 0\}$ 是有界的. 由式 (15) 易得:

$$\begin{aligned} E \sup_{0 \leq s \leq t} \|x^n(s) - u(s, x_s^n)\|_X^2 \leq & 5E \sup_{0 \leq s \leq t} \|T_a(s)[\varphi(0) - u(0, \varphi)]\|_X^2 + 5E \sup_{0 \leq s \leq t} \left\| \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} AS_a(s-r)u(r, x_r^n)dr \right\|_X^2 + \\ & 5E \sup_{0 \leq s \leq t} \left\| \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} S_a(s-r)f(r, x_r^{n-1})dr \right\|_X^2 + 5E \sup_{0 \leq s \leq t} \left\| \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} S_a(s-r)g(r, x_r^{n-1})dB^H(r) \right\|_X^2 + \\ & 5E \sup_{0 \leq s \leq t} \left\| \int_0^s \int_Z (s-r)^{\alpha-1} S_a(s-r)h(r, x_r^{n-1}, z)\tilde{N}(dr, dz) \right\|_X^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \| r)^{a-1} S_a(s-r)g(r, x_r^{n-1})dB^H(r) \|_X^2 + 5E \sup_{0 \leq s \leq t} \| \int_0^s \int_Z (s-r)^{a-1} S_a(s-r) \\ & \quad r)h(r, x_r^{n-1}, z)\tilde{N}(dr, dz) \|_X^2 =: 5 \sum_{i=1}^5 I_i. \end{aligned} \quad (16)$$

由式(9)、(11)和(13)可得:

$$\| T_a(t) \| \leq M. \quad (17)$$

根据(H4)和式(17)可得:

$$\begin{aligned} I_1 & \leq 2[E \sup_{0 \leq s \leq t} \| T_a(s)\varphi(0) \|_X^2 + E \sup_{0 \leq s \leq t} \| T_a(s)u(0, \varphi) \|_X^2] \leq \\ & 2[M^2 E \| \varphi \|_C^2 + M^2 \| (-A)^{-\beta} \|_X^2 E \| (-A)^\beta u(0, \varphi) \|_X^2] \leq \\ & 2M^2[1 + K^2 \| (-A)^{-\beta} \|_X^2] E \| \varphi \|_C^2. \end{aligned} \quad (18)$$

由式(9)、(12)和引理 2 易得对于 $\beta \in (0, 1)$,

$$\| (-A)^{1-\beta} S_a(t) \| \leq \frac{\alpha C_{1-\beta} \Gamma(\beta+1) t^{a\beta-a}}{\Gamma(\alpha\beta+1)}. \quad (19)$$

因 $E \sup_{0 \leq s \leq t} \| x_s^{n-1} \|_C^2 \leq E \sup_{0 \leq s \leq t} \| x^{n-1}(s) \|_X^2 + E \| \varphi \|_C^2$. 结合 Hölder 不等式、式(19)、引理 2 和(H4)有

$$\begin{aligned} I_2 & \leq E \sup_{0 \leq s \leq t} \| \int_0^s (s-r)^{a-1} (-A)^{1-\beta} S_a(s-r) (-A)^\beta u(r, x_r^n) dr \|_X^2 \leq E \sup_{0 \leq s \leq t} (\int_0^s (s-r)^{a-1} \| (-A)^{1-\beta} \cdot \\ & S_a(s-r) (-A)^\beta u(r, x_r^n) \|_X dr)^2 \leq \frac{\alpha^2 C_{1-\beta}^2 \Gamma^2(\beta+1)}{\Gamma^2(\alpha\beta+1)} E \sup_{0 \leq s \leq t} (\int_0^s (s-r)^{a-1} \| (s-r)^{a\beta-a} (-A)^\beta \cdot \\ & u(r, x_r^n) \|_X dr)^2 \leq \frac{\alpha^2 C_{1-\beta}^2 \Gamma^2(\beta+1)}{\Gamma^2(\alpha\beta+1)} E \sup_{0 \leq s \leq t} \int_0^s (s-r)^{2a\beta-2} dr \int_0^s \| (-A)^\beta u(r, x_r^n) \|_X^2 dr \leq \\ & \frac{K^2 \alpha^2 t^{2a\beta} C_{1-\beta}^2 \Gamma^2(\beta+1)}{(2\alpha\beta-1) \Gamma^2(\alpha\beta+1)} E (\sup_{0 \leq s \leq t} \| x^n(s) \|_X^2 + \| \varphi \|_C^2). \end{aligned} \quad (20)$$

再由式(9)、(12)和(13)可得:

$$\| S_a(t) \| \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)}. \quad (21)$$

根据(H2)、Hölder 不等式和 Jensen 不等式可推出

$$\begin{aligned} I_3 & \leq \frac{M^2}{\Gamma^2(\alpha)} E \sup_{0 \leq s \leq t} \int_0^s (s-r)^{2a-2} dr \int_0^s \| f(r, x_r^{n-1}) \|_X^2 dr \leq \\ & \frac{M^2 t^{2a-1}}{(2\alpha-1) \Gamma^2(\alpha)} \int_0^t H(r, E(\sup_{0 \leq v \leq r} \| x^{n-1}(v) \|_X^2 + \| \varphi \|_C^2)) dr. \end{aligned} \quad (22)$$

另一方面,由(H2)和引理 1 以及 Jensen 不等式可得:

$$\begin{aligned} I_4 & = E \sup_{0 \leq s \leq t} \| \int_0^s (s-r)^{a-1} S_a(s-r)g(r, x_r^{n-1})dB^H(r) \|_X^2 \leq E \| \int_0^t (t-s)^{a-1} S_a(t-s) \\ & g(s, x_s^{n-1})dB^H(s) \|_X^2 \leq \frac{2Ht^{2H-1}M^2}{\Gamma^2(\alpha)} E \int_0^t (t-s)^{2a-2} ds \int_0^t \| g(s, x_s^{n-1}) \|_{\mathcal{H}_2}^2 ds \leq \\ & \frac{2Ht^{2(H+a-1)}M^2}{(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)} \int_0^t H(r, E(\sup_{0 \leq v \leq r} \| x^{n-1}(v) \|_X^2 + \| \varphi \|_C^2)) dr. \end{aligned} \quad (23)$$

根据 Jensen 不等式,文献[15]中的引理 1 以及(H2),存在常数 $C_1 > 0$ 使得

$$\begin{aligned} I_5 & \leq \frac{C_1 M^2}{\Gamma^2(\alpha)} E \int_0^t (t-s)^{2a-2} ds \int_0^t \int_Z \| h(s, x_s^{n-1}, z) \|_X^2 \nu(dz) ds \leq \\ & \frac{C_1 t^{2a-1} M^2}{(2\alpha-1) \Gamma^2(\alpha)} \int_0^t H(r, E(\sup_{0 \leq v \leq r} \| x^{n-1}(v) \|_X^2 + \| \varphi \|_C^2)) dr. \end{aligned} \quad (24)$$

由于对 $x, y \in X, \epsilon \in (0, 1)$ 有 $\| x - y \|_X^2 \leq \frac{1}{1-\epsilon} \| x \|_X^2 + \frac{1}{\epsilon} \| y \|_X^2$. 因此,将式(18)、(20)、(22)、

(23)和(24)代入式(16)可得:

$$\begin{aligned} E(\sup_{0 \leq s \leq t} \|x^n(s)\|_X^2 + \|\varphi\|_C^2) &\leq \frac{1}{1-K\|(-A)^{-\beta}\|} E \sup_{0 \leq s \leq t} \|x^n(s) - u(s, x_s^n)\|_X^2 + \frac{1}{K\|(-A)^{-\beta}\|} \\ &E \sup_{0 \leq s \leq t} \|u(s, x_s^n)\|_X^2 + E\|\varphi\|_C^2 \leq \frac{10M^2(1+K^2\|(-A)^{-\beta}\|^2)}{1-K\|(-A)^{-\beta}\|} E\|\varphi\|_C^2 + E\|\varphi\|_C^2 + \\ &\left[\frac{5K^2\alpha^2b^{2\alpha\beta}C_{1-\beta}^2\Gamma^2(\beta+1)}{(2\alpha\beta-1)\Gamma^2(\alpha\beta+1)(1-K\|(-A)^{-\beta}\|)} + K\|(-A)^{-\beta}\| \right] E(\sup_{0 \leq s \leq t} \|x^n(s)\|_X^2 + \|\varphi\|_C^2) + \\ &\frac{5M^2b^{2\alpha-1}[1+2Hb^{2H-1}+C_1]}{(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)(1-K\|(-A)^{-\beta}\|)} \int_0^t H(r, E(\sup_{0 \leq v \leq r} \|x^{n-1}(v)\|_X^2 + \|\varphi\|_C^2)) dr. \end{aligned} \quad (25)$$

条件(H2-ii)表示存在解 u_t 满足 $u_t = C_2 E\|\varphi\|_C^2 + C_3 \int_0^t H(r, u_r) dr$, 其中,

$$C_2 = \frac{1}{1-l} \left(\frac{10M^2(1+K^2\|(-A)^{-\beta}\|^2)}{1-K\|(-A)^{-\beta}\|} + 1 \right), C_3 = \frac{5M^2b^{2\alpha-1}[1+2Hb^{2H-1}+C_1]}{(1-l)(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)(1-K\|(-A)^{-\beta}\|)}.$$

因为 $E\|\varphi\|_C^2 < \infty$, 所以式(25)中 $E(\sup_{0 \leq s \leq t} \|x^n(s)\|_X^2) \leq u_t \leq u_b < \infty$. 这表明序列 $\{x^n(t), n \geq 0\}$ 是有界的.

步骤2 证明 $\{x^n(t), n \geq 0\}$ 是柯西序列.

对于任意 $n, m \geq 0$ 和 $t \in [0, b]$, 由式(15)、(H3)和步骤1得:

$$\begin{aligned} E \sup_{0 \leq s \leq t} \|x^{n+1}(s) - u(s, x_s^{n+1}) - x^{m+1}(s) + u(s, x_s^{m+1})\|_X^2 &\leq 4E \sup_{0 \leq s \leq t} \left\| \int_0^s (s-r)^{a-1} AS_a(s-r)[u(r, x_r^{n+1}) - \right. \\ &u(r, x_r^{m+1})] dr \left. \right\|_X^2 + 4E \sup_{0 \leq s \leq t} \left\| \int_0^s (s-r)^{a-1} S_a(s-r)[f(r, x_r^n) - f(r, x_r^m)] dr \right\|_X^2 + 4E \sup_{0 \leq s \leq t} \left\| \int_0^s (s-r)^{a-1} S_a(s-r)[g(r, x_r^n) - g(r, x_r^m)] dB^H(r) \right\|_X^2 + 4E \sup_{0 \leq s \leq t} \left\| \int_0^s \int_Z (s-r)^{a-1} S_a(s-r)[h(r, x_r^n, z) - h(r, x_r^m, z)] \tilde{N}(dr, dz) \right\|_X^2 \leq \\ &\frac{4K^2\alpha^2b^{2\alpha\beta}C_{1-\beta}^2\Gamma^2(\beta+1)}{(2\alpha\beta-1)\Gamma^2(\alpha\beta+1)} E(\sup_{0 \leq s \leq t} \|x^{n+1}(s) - x^{m+1}(s)\|_X^2) + \\ &\frac{4M^2b^{2\alpha-1}[1+2Hb^{2H-1}+C_4]}{(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)} \int_0^t G(r, E(\sup_{0 \leq v \leq r} \|x^n(v) - x^m(v)\|_X^2)) dr, \end{aligned} \quad (26)$$

其中 C_4 是文献[15]引理1中的常数. 故有

$$\begin{aligned} E(\sup_{0 \leq s \leq t} \|x^{n+1}(s) - x^{m+1}(s)\|_X^2) &\leq \frac{1}{1-K\|(-A)^{-\beta}\|} E \sup_{0 \leq s \leq t} \|x^{n+1}(s) - u(s, x_s^{n+1}) - x^{m+1}(s) + u(s, x_s^{m+1})\|_X^2 + \\ &\frac{1}{K\|(-A)^{-\beta}\|} E \sup_{0 \leq s \leq t} \|u(s, x_s^{n+1}) - u(s, x_s^{m+1})\|_X^2 \leq \frac{4K^2\alpha^2b^{2\alpha\beta}C_{1-\beta}^2\Gamma^2(\beta+1)}{(2\alpha\beta-1)\Gamma^2(\alpha\beta+1)(1-K\|(-A)^{-\beta}\|)} \cdot \\ &E(\sup_{0 \leq s \leq t} \|x^{n+1}(s) - x^{m+1}(s)\|_X^2) + K\|(-A)^{-\beta}\| E(\sup_{0 \leq s \leq t} \|x^{n+1}(s) - x^{m+1}(s)\|_X^2) + \\ &\frac{4M^2b^{2\alpha-1}[1+2Hb^{2H-1}+C_4]}{(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)(1-K\|(-A)^{-\beta}\|)} \int_0^t G(r, E(\sup_{0 \leq v \leq r} \|x^n(v) - x^m(v)\|_X^2)) dr. \end{aligned} \quad (27)$$

令 $z(t) := \lim_{n, m \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq s \leq t} E(\sup_{0 \leq s \leq t} \|x^n(s) - x^m(s)\|_X^2)$. 由式(14)和 Fatou 引理可得 $z(t) \leq C_5 \int_0^t G(s, z(s)) ds$, 其中

$$C_5 = \frac{4M^2b^{2\alpha-1}[1+2Hb^{2H-1}+C_4]}{(1-l)(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)(1-K\|(-A)^{-\beta}\|)}.$$

根据 (H3-ii) 可得 $z(t) = 0$, 即 $\{x^n(t), n \geq 0\}$ 是柯西序列.

步骤3 证明 方程(1)的解的存在唯一性.

Borel-Cantelli 引理表明, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $x^n(t) \rightarrow x(t)$ 在 $0 \leq t \leq b$ 上一致成立. 因此, 在式(15)两边取极限, 可得 $x(t)$ 是方程(1)的解, 即解存在. 并且通过与步骤2相同的过程可得解的唯一性.

注2 当 $H = \frac{1}{2}$, B^H 是标准 Brown 运动. 文献[1-3]的一些结果属于本文的特殊情形. 例如当 $\alpha = 1$,

$H = \frac{1}{2}, h = 0$, 以及对某些常数 K_1 有 $G(t, u) = K_1 u$, 条件(H3) 满足全局 Lipschitz 条件, 这些问题在文献 [1] 中进行了讨论. 在注 1 中, 当 $\alpha = 1, H = \frac{1}{2}, h = 0$ 以及 $L(t) = 1$ 时, 条件在文献[2] 中进行了讨论. 当 $\alpha = 1, H = \frac{1}{2}, h = 0$ 时, 条件在文献[3]中进行了讨论.

3 例 子

为了验证理论的有效性, 考虑以下具有分数 Brown 运动和泊松跳的分数阶中立型随机偏微分方程

$$\begin{cases} d[J_t^{1-\alpha}(v(t, \xi) - u(t, v(t-r, \xi)) - \varphi(0, \xi) + u(0, v(-r, \xi)))] = [\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} v(t, \xi) + F(t, v(t-r, \xi))]dt + \Theta(t, v(t-r, \xi))dB^H(t) + \int_Z h(t, v(t, \xi), z)\tilde{N}(dt, dz), 0 \leq \xi \leq 1, r > 0, t \geq 0, \\ v(t, 0) = v(t, 1) = 0, t \geq 0, \\ v(t, \xi) = \varphi(t, \xi), t \in [-\tau, 0], \tau > 0, \end{cases} \quad (28)$$

其中 $\alpha \in (\frac{3}{4}, 1), B^H(t)$ 是分数 Brown 运动, Hurst 参数 $H \in (\frac{1}{2}, 1)$.

令 $X = L^2[0, 1], A = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}, \mathcal{D}(A) = \{z \in X; z, z' \text{ 绝对连续}, z'' \in X, z(0) = z(1) = 0\}$. 则

$$Az = - \sum_{n=1}^{\infty} n^2(z, z_n)z_n, z \in \mathcal{D}(A),$$

其中 $z_n(x) = \sqrt{2} \sin n\pi x, n = 1, 2, \dots$ 是 A 的特征值的正交集. 已知 $T(t) (t \geq 0)$ 是由 A 生成的紧解析半群, 且 $T(t)z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} (z, z_n)z_n, z \in X$. 存在常数 $M > 0$ 使得 $\|T(t)\| \leq M$, 这表明(H1)成立. 若取 $\beta = \frac{2}{3}$, 则算子 $(-A)^{\frac{2}{3}}$ 由下式给出 $(-A)^{\frac{2}{3}}z = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{4}{3}}(z, z_n)z_n, z \in \mathcal{D}((-A)^{\frac{2}{3}})$, 其中 $\mathcal{D}((-A)^{\frac{2}{3}}) = \{z(\cdot) \in X; \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{4}{3}}(z, z_n)z_n \in X\}$.

由式(9)、(12)可得: $S_a(t)z = \int_0^{\infty} \alpha r M_a(r) T(t^a r) z dr = \sum_{n=1}^{\infty} E_{a,a}(-n^2 t^a)(z, z_n)z_n, z \in X$. 令 $v(t)(\cdot) = v(t, \cdot), t \geq 0$. 分别定义 $f(t, v)(\cdot) = F(t, v(\cdot)), g(t, v)(\cdot) = \Theta(t, v(\cdot))$. 由此可将系统(28)改写为(1)的形式. 若对 F, Θ 以及 h 施加合适的条件来满足定理 1 的条件, 则可得出当 $t \geq 0$ 时系统(28)在 $\frac{5K^2 \alpha^2 b^{2\alpha\beta} C_{1-\beta}^2 \Gamma^2(\beta + 1)}{(2\alpha\beta - 1)\Gamma^2(\alpha\beta + 1)(1 - K \|(-A)^{-\beta}\|)} + K \|(-A)^{-\beta}\| < 1$ 的条件下存在唯一的粘性解.

4 结 论

本文讨论了一类具有分数 Brown 运动的分数阶中立型随机微分方程. 运用逐步逼近法给出了非 Lipschitz 条件和弱化的线性增长条件下粘性解的存在性和唯一性的充分条件, 其中 Lipschitz 条件视为其特殊情形. 并通过具有分数 Brown 运动的随机非线性波动方程的应用验证了理论的有效性. 本文的方法避免了使用较强的 Lipschitz 条件, 对于研究随机非线性系统的解的存在唯一性较为有效. 该方法亦可用于讨论时滞中立型随机微分方程解的存在唯一性和稳定性, 为研究其他中立型随机微分方程提供了理论依据.

参 考 文 献

[1] GOVINDAN T E. Almost sure exponential stability for stochastic neutral partial functional differential equations[J]. Stochastics, 2005, 77: 139-154.

- [2] BAO J H, HOU Z T. Existence of mild solutions to stochastic neutral partial functional differential equations with non-Lipschitz coefficients[J]. Comput Math Appl, 2010, 59: 207-214.
- [3] JIANG F, SHEN Y. A note on the existence and uniqueness of mild solutions to neutral stochastic partial functional differential equations with non-Lipschitz coefficients[J]. Comput Math Appl, 2011, 61: 1590-1594.
- [4] BAO H B, CAO J D. Existence of solutions for fractional stochastic impulsive neutral functional differential equations with infinite delay[J]. Advances in Difference Equations, 2017(1): 66.
- [5] AHMADOVA A, MAHMUDOV N I. Existence and uniqueness results for a class of fractional stochastic neutral differential equations[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2020, 139: 110253.
- [6] LI Y J, WANG Y J. The existence and asymptotic behavior of solutions to fractional stochastic evolution equations with infinite delay[J]. Journal of Differential Equations, 2019, 266: 3514-3558.
- [7] REN Y, XIA N M. Existence, uniqueness and stability of the solutions to neutral stochastic functional differential equations with infinite delay[J]. Applied Mathematics and Computation, 2009, 210: 72-79.
- [8] CARABALLO T, GARRIDO-ATIENZA M J, TANIGUCHI T. The existence and exponential behavior of solutions to stochastic delay evolution equations with a fractional Brownian motion[J]. Nonlinear Anal TMA, 2011, 74: 3671-3684.
- [9] BOUFOUSSI B, HAJJI S. Neutral stochastic functional differential equations driven by a fractional Brownian motion in a Hilbert space[J]. Statistics and Probability Letters, 2012, 82: 1549-1558.
- [10] DENG S F, SHU X B, MAO J Z. Existence and exponential stability for impulsive neutral stochastic functional differential equations driven by fBm with noncompact semigroup via Mönch fixed point[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2018, 467: 398-420.
- [11] PAZY A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1983.
- [12] PODLUBNY I. Fractional Differential Equations[C]// Mathematics in Science and Engineering. [S.l.: s.n.], 1999.
- [13] MAINARDI F. Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models[M]. London: Imperial College Press, 2010.
- [14] MAO X R. Stochastic Differential Equations and Applications (Second Edition)[M]. New York: Academic Press, 2006.
- [15] TANIGUCHI T. The existence and asymptotic behaviour of solutions to non-Lipschitz stochastic functional evolution equations driven by Poisson jumps[J]. Stochastics, 2010, 82: 339-363.

Existence and uniqueness of solutions to fractional neutral stochastic differential equations with fractional brownian motion

Li Guoping¹, Han Ting^{1,2}

(1. Xinhua College, Ningxia University, Yinchuan 750021, China;

2. College of Mathematics and Statistics, Ningxia University, Yinchuan 750021, China)

Abstract: In this paper, we consider a class of fractional-order neutral stochastic differential equations with fractional Brownian motion by using picard step by step in a Hilbert space. A novel sufficient condition for the existence and uniqueness of mild solutions is obtained in conditions of the non-Lipschitz condition and the weakened linear growth. The result generalizes a few previous known results. An application to the stochastic nonlinear wave equation with fractional Brownian motion is given to illustrate the validity of the obtained theory.

Keywords: fractional stochastic differential equations; fractional Brownian motion; mild solution; existence and uniqueness

[责任编辑 陈留院 杨浦]